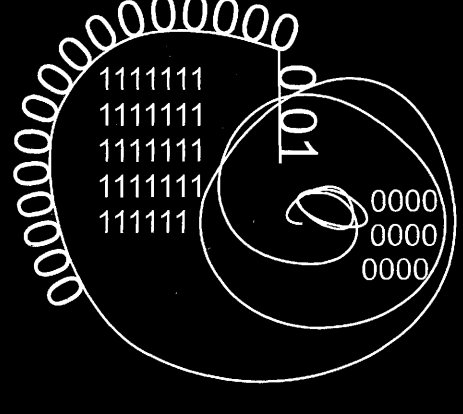
ionel narița

logica simbolică



editura de vest

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
NARIŢA, IONEL
Logica simbolică / Ionel Narița. - Timişoara : Editura de Vest, 2010
ISBN 978-973-36-0521-8

164.2

ISBN 978-973-36-0521-8

© – 2010 – EDITURA DE VEST - TIMIŞOARA
P-ța Sf. Gheorghe nr. 1, ROMÂNIA

IONEL NARIȚA

LOGICA SIMBOLICĂ

EDITURA DE VEST
Timişoara, 2010

LIMBAJUL SIMBOLIC

Limbajele simbolice fac parte din categoria limbajelor artificiale. Spre deosebire de limbajele naturale, care s-au constituit în urma unor procese sociale complexe, limbajele artificiale au fost create cu un anumit scop, având unul sau mai mulți autori. Limbajele simbolice au fost elaborate cu scopul de a depăși unele „neajunsuri" ale limbajului natural, cum ar fi caracterul ambiguu sau imprecis al expresiilor sale. Inițiatorii limbajelor simbolice au considerat că limbajul natural nu este potrivit pentru a exprima operațiile gândirii care, dimpotrivă, s-ar caracteriza prin precizie şi univocitate. Limbajul natural apărea ca impropriu îndeosebi pentru a exprima enunțurile matematicii; de aceea, limbajele simbolice s-au constituit în principal pentru a servi scopurilor matematicii, pentru a oferi un mijloc de exprimare sau clarificare a enunțurilor matematice şi a operațiilor asupra acestora.

Spre deosebire de limbajul natural, care conține numai expresii constante, limbajele simbolice conțin expresii *variabile*. Expresiile constante suportă, relativ la un context dat, o singură interpretare, în vreme ce expresiile variabile pot primi interpretări diferite. Pe câtă vreme, expresiile limbajului comun sunt interpretate pe domenii exterioare limbajului, expresiile limbajelor simbolice sunt interpretate prin alte categorii de expresii, cum sunt *constantele interpretative*. Dintre interpretările posibile ale expresiilor unui limbaj simbolic se remarcă interpretarea prin expresiile limbajului natural. În ultimă instanță, limbajele simbolice au

fost construite pentru a facilita cercetarea unor fenomene din interiorul limbajului natural. În afara unei asemenea interpretări, limbajele simbolice s-ar reduce la un simplu joc de simboluri, care nu ar avea nici o finalitate. De aceea, eficiența limbajelor simbolice trebuie judecată după cum reușesc să dea seama de proprietățile sintactice, semantice sau logice ale limbajului natural. Limbajele simbolice sunt doar instrumente prin intermediul cărora putem evidenția cu mai multă claritate și precizie proprietățile expresiilor limbajului natural și ale operațiilor cu aceste expresii.

Un limbaj simbolic conține două categorii de simboluri, variabile și constante. Deosebirea între acestea este că simbolurilor variabile le putem asocia interpretări diverse într-un context dat, în vreme ce simbolurile constante primesc o interpretare determinată. Cu toate acestea, simbolurile variabile nu pot primi orice fel de interpretare ci, așa cum vom vedea, spectrul interpretărilor la care pot fi supuse acestea este limitat de proprietățile lor sintactice, altfel sunt generate paradoxuri. Simbolurile constante care aparțin unui limbaj simbolic nu trebuie confundate cu constantele interpretative prin care pot fi interpretate expresiile unui asemenea limbaj. Constantele interpretative nu aparțin limbajului simbolic; expresiile care conțin atât simboluri cât și constante interpretative sunt *parțial interpretate*.

Combinațiile de simboluri alcătuiesc mulțimea expresiilor simbolice care pot fi construite într-un limbaj simbolic. Dintre aceste expresii numai unele, numite *expresii bine formate*, aparțin limbajului. Prin expresie bine formată sau *formulă* a unui limbaj simbolic înțelegem o expresie care este interpretată prin propoziții din cadrul limbajului natural. Prin urmare, se deosebesc următoarele tipuri de expresii obținute prin combinarea simbolurilor dintr-un limbaj simbolic: a) expresii bine formate sau formule; b) subexpresii bine formate sau subformule, care sunt părți ale unei expresii

care se bucură de bineformare; c) expresii care nu sunt bine formate; d) subexpresii care nu sunt bine formate.

Simbolurile nu pot fi asimilate cu literele unui alfabet. Mai întâi, un limbaj simbolic poate utiliza un număr nelimitat de simboluri, or alfabetul are întotdeauna un număr finit de litere. În al doilea rând, simbolurile au interpretare autonomă, în vreme ce literele dobândesc interpretare numai dacă sunt combinate cu alte litere, formând cuvinte sau expresii mai complexe. De aceea, limbajul simbolic nu are o fonetică.

Deoarece limbajele simbolice au fost astfel construite încât să înlăture imixtiunile subiective şi să asigure eliberarea logicii de psihologism, acestea nu au o componentă pragmatică. Formulele unui limbaj simbolic se caracterizează prin valori care nu depind de context, adică nu depind de starea în care se găseşte evaluatorul, de aceea, utilizatorul unui limbaj simbolic nu are nici o influenţă asupra valorii expresiilor acestuia. Am putea spune că tocmai acesta este scopul creării limbajelor simbolice – eliminarea componentei pragmatice. Prin urmare, un limbaj simbolic se caracterizează numai prin *sintaxă* şi *semantică*. A defini un limbaj simbolic înseamnă a preciza care este sintaxa şi semantica sa.

Rolul sintaxei unui limbaj simbolic este de a defini conceptul de *expresie bine formată* sau *formulă* în acel limbaj cât şi de a elabora metode de decizie prin care să se determine dacă o expresie a limbajului respectiv este bine formată sau nu. Spre deosebire de limbajul natural, care are o sintaxă şi semantică deschisă, sintaxa şi semantica limbajelor simbolice este *închisă*, respectiv, conţin un număr finit de reguli. Sintaxa unui limbaj simbolic conţine:

a) lista simbolurilor primitive, care cuprinde simbolurile introduse în limbaj fără definiţie;

b) lista regulilor de bine formare, care arată cum pot fi obţinute formule bine formate din simbolurile primitive;

c) lista regulilor de transformare, care conține reguli privind obținerea de formule din alte formule;

d) lista simbolurilor derivate, prin care se introduc noi simboluri, prin definiție, pornind de la simbolurile primitive;

e) metode de decizie asupra bine formării expresiilor. Cu ajutorul acestor metode se poate determina dacă o expresie este bine formată într-un limbaj simbolic sau nu.

Semantica unui limbaj simbolic precizează regulile prin care expresiile sale sunt interpretate fie peste limbajul natural, fie prin intermediul constantelor interpretative, ori pe alte domenii şi regulile de calcul în vederea interpretării unei formule. De aceea, semantica limbajelor simbolice conține:

a) lista regulilor de interpretare a simbolurilor primitive;

b) metode de calcul a interpretării formulelor limbajului simbolic;

c) metode de simbolizare şi formalizare în limbajul simbolic.

Simbolizarea şi formalizarea sunt operații inverse interpretării, prin intermediul cărora se trece de la expresii ale unui limbaj oarecare, inclusiv ale limbajului natural, la expresii ale limbajului simbolic. Expresia formalizată trebuie să fie una dintre interpretările posibile ale formulei corespunzătoare din limbajul simbolic.

Limbajele simbolice nu au mijloace pentru autoexpunere, de aceea, pentru a prezenta componentele limbajelor simbolice, utilizăm limbajul natural, la care adăugăm o serie de notații ale elementelor care alcătuiesc limbajele simbolice:

1) A, B, C sunt notații pentru formule;

2) prin **EBF** notăm clasa expresiilor bine formate sau clasa formulelor;

3) $\in$ este relaţia de apartenenţă;

4) **Con** este clasa constantelor;

5) **Var** este clasa variabilelor;

6) |- este relaţia de detaşare; |-A înseamnă că formula *A* poate fi detaşată;

7) relaţiile dintre formule le exprimăm în limbajul natural prin operatori şi conectori precum şi, sau, dacă... atunci... etc.;

8) $=_{df}$ este relaţia de definire;

9) $=_{not}$ este relaţia de notare;

10) E este o expresie oarecare.

PROPOZIȚII

Prin *logică a propozițiilor*, LLp, înțelegem logica asociată limbajului simbolic al propozițiilor, pe care îl prescurtăm prin *limbajul propozițiilor*, Lp. Simbolurile variabile ale limbajului propozițiilor sunt interpretate în limbajul natural prin propoziții, iar simbolurile constante sunt interpretate prin *functori* care transformă una sau mai multe propoziții în alte propoziții.

1. Sintaxa limbajului propozițiilor

1.1. *Lista simbolurilor primitive*

1.1.1. Lista simbolurilor variabile

p, q, r, (acestea pot primi indici, p_i, q_i etc., şi se numesc *variabile propoziționale*, **Var(prop)**)

1.1.2. Lista simbolurilor constante

a) ~ (simbolul negației, se citeşte „non")

b) v (simbolul disjuncției, se citeşte „sau")

1.1.3. Lista simbolurilor auxiliare

a) (,) (paranteze)

1.2. *Lista regulilor de bine formare*

Dacă E ∈ **Var(prop),** atunci E ∈ **EBF** (orice variabilă propozițională este formulă în Lp).

De exemplu, expresii precum „p", „q", „p_1" etc. sunt bine formate în limbajul propozițiilor.

1.3. *Lista regulilor de transformare*

a) Dacă A ∈ **EBF,** atunci ~A ∈ **EBF** (negația unei formule este formulă în Lp).

b) Dacă A, B ∈ **EBF,** atunci AvB ∈ **EBF** (disjuncția a două formule este formulă în Lp).

c) Dacă A ∈ **EBF,** atunci (A) ∈ **EBF** (o formulă pusă între paranteze rămâne formulă în Lp).

De exemplu, „pvq", „~(pv(pvq))", „~~p" sunt formule ale Lp. În schimb, „pv", „(pvq", „p~(pvq)" nu sunt formule.

1.4. *Lista simbolurilor derivate*

a) $A\&B =_{df} \sim A v \sim B$. (simbolul conjuncției, se citeşte „şi").

b) $A \supset B =_{df} \sim AvB$ (simbolul implicației materiale, se citeşte „implică"; *A* se numeşte *antecedent* şi *B* este *consecventul* implicației).

c) $A \equiv B =_{df} \sim(\sim Av \sim B)v\sim(AvB)$ (simbolul echivalenței materiale, se citeşte „este echivalent cu").

1.5. *Decizia sintactică*

Problema deciziei sintactice este stabilirea faptului dacă o expresie alcătuită din simboluri ale limbajului propozițiilor este formulă sau nu. Expresiile Lp se împart în două categorii: formule şi functori. Convenim să notăm categoria formulelor prin *s*. Functorii au rolul ca, în urma aplicării lor unor formule, să genereze alte formule, de aceea categoria functorilor este *derivată*. Functorii sunt notați prin fracții având la numitor simbolul expresiilor cărora se aplică, iar la numărător, categoria expresiei care rezultă prin acțiunea functorului. Deosebim următoarele subcategorii de functori:

a) *functori monari* care sunt aplicați fie unei expresii aflate la stânga, fie uneia aflate la dreapta, cum sunt: ~ = s/s.

b) *functori binari* care acționează asupra a două formule, generând o nouă formulă: s\s/s. Din această categorie fac parte disjuncția, conjuncția, implicația și echivalența.

Algoritmul de decizie sintactică asupra unei formule *A* este următorul:

a) simbolurile din formula *A* sunt înlocuite cu simbolurile categoriilor din care fac parte, păstrându-se parantezele. Se obține expresia *A1*.

b) asupra expresiei *A1* se aplică următoarele reguli de calcul, asemănătoare calculului cu fracții:

R1. s/s.s = s
R2. s\s.s = s
R3. s.s\s/s.s = s
R4. (s) = s

c) se efectuează calculul în *A1* potrivit regulilor R1-R4, ținându-se seama de simbolurile auxiliare.

d) dacă se obține *s,* atunci *A* este formulă. În alt caz, *A* nu este formulă.

De exemplu, să decidem asupra expresiei A = (~((~p)vq))v((~q)vp):

A1 = (s/s.((s/s.s).s\s/s.s)).s\s/s.((s/s.s).s\s/s.s)
A1 = (s/s.(s.s\s/s.s)).s\s/s.(s.s\s/s.s) = (s/s.(s)).s\s/s.(s) =
(s).s\s/s.(s) = s.s\s/s.s = s.

A1 este formulă a Lp.

2. Semantica limbajului propoziţiilor

2.1. *Interpretarea logică*

Formulele limbajului propoziţiilor sunt interpretate logic cu ajutorul a două constante interpretative notate prin $\top$ şi $\bot$. Acestea sunt puse în corespondenţă cu valorile de adevăr, astfel: $\top$ = adevărat; $\bot$ = fals.

2.1.1. *Interpretarea logică a simbolurilor din Lp*

Regulile de interpretare sunt următoarele:

RI1. Variabilele propoziţionale sunt interpretate logic prin constantele $\top$ şi $\bot$, adică, pe mulţimea valorilor de adevăr $\mathbf{V} = \{\top, \bot\}$. Sistemul alcătuit din n variabile are 2^n interpretări. Iată interpretările unui sistem alcătuit dintr-o singură variabilă şi a unui sistem compus din două variabile:

a) interpretarea logică a unui sistem format dintr-o singură variabilă:

Interpretări	$\mathbf{I_1}$	$\mathbf{I_0}$
p	$\top$	$\bot$

b) interpretarea logică a unui sistem alcătuit din două variabile:

Interpretări	$\mathbf{I_3}$	$\mathbf{I_2}$	$\mathbf{I_1}$	$\mathbf{I_0}$
p	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
q	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$

RI2. Simbolurile constante sunt interpretate prin *funcții de adevăr.* Funcțiile de adevăr au ca domeniu diferite puteri ale mulțimii valorilor de adevăr, $\mathbf{V} = \{\top, \bot\}$, și drept codomeniu mulțimea valorilor de adevăr. Prin urmare, funcțiile de adevăr sunt funcții de forma $\varphi: \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}$

a) interpretarea logică a negației. Negația este interpretată printr-o funcție de adevăr cu un singur argument, $\sim: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, conform tabelului următor:

Interpretări	$\mathbf{I_1}$	$\mathbf{I_0}$
p	$\top$	$\bot$
~p	$\bot$	$\top$

Observăm că negația schimbă interpretarea logică a variabilei la care se aplică.

b) interpretarea logică a disjuncției. Constanta disjuncției este interpretată logic printr-o funcție de adevăr cu două argumente, respectiv, $v: \mathbf{V}^2 \rightarrow \mathbf{V}$, dată de tabelul:

Interpretări	$\mathbf{I_3}$	$\mathbf{I_2}$	$\mathbf{I_1}$	$\mathbf{I_0}$
p	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
q	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
pvq	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$

Disjuncția este interpretată prin *fals* numai dacă ambii termeni ai disjuncției au interpretarea *fals*. În schimb, dacă cel puțin unul dintre termeni are interpretarea *adevărat,* atunci disjuncția în ansamblu are, la fel, interpretarea *adevărat.*

2.1.2. *Interpretarea logică a unei formule a limbajului propoziţiilor*

Utilizând regulile de interpretare a simbolurilor primitive ale limbajului propoziţiilor, se poate calcula interpretarea oricărei formule a Lp care conţine un număr finit de simboluri. Calculul interpretării unei formule *A* urmează următorii paşi:

a) simbolurile derivate din formula *A* sunt exprimate cu ajutorul simbolurilor primitive;

b) se stabilesc interpretările sistemului de variabile conţinute de formula *A*;

c) pentru fiecare interpretare a sistemului de variabile se stabilesc interpretările subformulelor formulei *A*, până se ajunge la interpretările corespunzătoare ale formulei date.

De pildă, să stabilim care sunt interpretările formulei A = p&q.

a) A = ~(~pv~q);

b) interpretările formulei *A* sunt date de următorul tabel:

Interpretări	$\mathbf{I_3}$	$\mathbf{I_2}$	$\mathbf{I_1}$	$\mathbf{I_0}$
p	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
q	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
~p	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
~q	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
~pv~q	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
~(~pv~q)	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

Constatăm că interpretarea este o funcție de adevăr care ia valoarea *adevărat* numai în cazul în care ambii termeni ai conjuncției au interpretarea *adevărat*. Conjuncția, la fel cu negația şi disjuncția, este interpretată logic printr-o funcție de adevăr. Celelalte simboluri derivate ale Lp acceptă, la rândul lor, drept interpretări următoarele funcții de adevăr de câte două argumente:

Interpretări	I_3	I_2	I_1	I_0
p	T	T	⊥	⊥
q	T	⊥	T	⊥
p⊃q	T	⊥	T	T
P=q	T	⊥	⊥	T

De fapt, orice formulă a Lp are ca interpretare logică o funcție de adevăr. În total există $2^{(2^n)}$ funcții de adevăr de *n* argumente, respectiv, patru funcții de un argument şi 16 funcții de adevăr cu două argumente etc. Iată tabelele funcțiilor de adevăr cu un argument şi cu două argumente:

Interpretări	I_1	I_0
p	T	⊥
Contradicția	⊥	⊥
Negația	⊥	T
Afirmația	T	⊥
Tautologia	T	T

Interpretări	I_3	I_2	I_1	I_0
p	T	T	⊥	⊥
q	T	⊥	T	⊥
contradicția	⊥	⊥	⊥	⊥
excluziunea	⊥	⊥	⊥	T

antireplicația	⊥	⊥	⊤	⊥
negarea lui p	⊥	⊥	⊤	⊤
antiimplicația	⊥	⊤	⊥	⊥
negarea lui q	⊥	⊤	⊥	⊤
disjuncția exclusivă	⊥	⊤	⊤	⊥
incompatibilitatea	⊥	⊤	⊤	⊤
conjuncție	⊤	⊥	⊥	⊥
echivalență	⊤	⊥	⊥	⊤
afirmarea lui q	⊤	⊥	⊤	⊥
implicația	⊤	⊥	⊤	⊤
afirmarea lui p	⊤	⊤	⊥	⊥
replicația	⊤	⊤	⊥	⊤
disjuncția	⊤	⊤	⊤	⊥
tautologia	⊤	⊤	⊤	⊤

Deşi sunt 16 funcţii de adevăr de două argumente, patru dintre ele depind doar de un singur argument.

2.1.3. *Exprimarea funcţiilor de adevăr*

O funcție de adevăr poate fi exprimată în Lp prin formule diferite. De pildă, funcția *implicație materială* poate fi exprimată prin formule precum: „p⊃q"; „~pvq"; „~(p&~q)" etc. Pentru a exprima o funcție de adevăr, $F(p_1, \ldots, p_n)$, în Lp se procedează în felul următor:

a) fie interpretarea I_k a sistemului de variabile propoziționale $<p_1, \ldots, p_n>$. Se alcătuieşte conjuncția $A_k = \&_i(e_i p_i)$ corespunzătoare interpretării I_k, unde e_i reprezintă afirmația dacă interpretarea variabilei p_i este ⊤ şi negația dacă p_i are interpretarea ⊥;

b) formula care exprimă funcția *F* este disjuncția $v_k(e_k A_k)$, unde e_k este afirmația dacă *F* are valoarea ⊤ pentru

Babeş-Bolyai Central University

interpretarea I_k şi negaţia dacă valoarea funcţiei este $\perp$ pentru interpretarea corespunzătoare a variabilelor p_i.

De exemplu, să stabilim formula corespunzătoare funcţiei implicaţiei materiale:

$$A_3 = p\&q;\ A_2 = p\&\sim q;\ A_1 = \sim p\&q;\ A_0 = \sim p\&\sim q.$$
$$F = (p\&q)v\sim(p\&\sim q)v(\sim p\&q)v(\sim p\&\sim q).$$

Deoarece, aceeaşi funcţie de adevăr poate fi exprimată utilizând simboluri diferite, unele combinaţii de simboluri, cum sunt {~, v}; {~, &} sau {~, $\supset$}, sunt suficiente pentru a exprima orice funcţie de adevăr cu unul sau două argumente. Mai mult, există simboluri, cum este cel al excluziunii, /: $\mathbf{V}^2 \rightarrow \mathbf{V}$, p/q = ~(pvq), care permit exprimarea oricărei funcţii de adevăr.

2.2. *Interpretarea naturală*

Prin interpretare naturală, expresiile limbajului propoziţiilor sunt puse în corespondenţă cu expresii ale limbajului natural, respectiv, formulele sunt interpretate natural prin *propoziţii*, adică, prin expresii ale limbajului natural care au valoare de adevăr. Acest principiu conduce la următoarele reguli de interpretare naturală:

a) variabilele propoziţionale sunt interpretate prin *propoziţii simple*;

b) constantele sunt interpretate prin functori care transformă propoziţiile în alte propoziţii, anume, prin functori cărora le corespund funcţii de adevăr. Regulile de interpretare naturală a constantelor Lp sunt următoarele:

R1. *Negaţia*, (~), este interpretată prin expresia „nu"

R2. *Disjuncţia*, (v), primeşte interpretarea „sau"

R3. *Conjuncția*, (&), are interpretarea naturală „și"

R4. *Implicația materială*, (⊃), este interpretată în limbajul natural prin „dacă... atunci..."

R5. *Echivalența materială*, (≡), are interpretarea „este echivalent cu"

De exemplu, formula „p&~q", admite interpretarea:

a) p = „plouă"; q = „John a deschis umbrela";
b) „Plouă și John nu a deschis umbrela"

Operația inversă, prin care propozițiile limbajului natural sunt reprezentate prin formule ale unui limbaj simbolic se numește *formalizare*. Formalizarea utilizează regulile de *simbolizare* prin care, expresiilor limbajului natural le sunt puse în corespondență expresii ale limbajului simbolic. În cazul limbajului propozițiilor, regulile de simbolizare sunt următoarele:

a) propozițiile sunt simbolizate prin variabile propoziționale;

b) functorii propoziționali sunt simbolizați prin simboluri constante, potrivit regulilor:

R1. Functorii negației, cum sunt, „nu", „non" etc., sunt simbolizați prin constanta negației, (~).

R2. Functorii disjunctivi, de pildă, „... sau...", „... ori..." etc., sunt simbolizați prin disjuncție, (v).

R3. Functorii conjunctivi, de exemplu, „și", sunt asociați cu simbolul conjuncției, (&).

R4. Functorii condiționali, „dacă... atunci...", „... implică..." etc., sunt simbolizați prin implicația materială, (⊃).

R5. Functorii de echivalență, „dacă şi numai dacă... atunci...", „... este echivalent cu..." etc., sunt simbolizați prin echivalența materială (≡).

Formalizarea parcurge următorii paşi:

a) propoziția dată este analizată în propoziții componente şi functori propoziționali;

b) propozițiile componente sunt simbolizate prin variabile propoziționale (propozițiile distincte sunt simbolizate prin variabile distincte);

c) functorii propoziționali sunt simbolizați în funcție de rolul jucat în propoziția dată, conform regulilor anterioare;

d) simbolurile obținute prin simbolizare sunt aranjate într-un şir corespunzător locului ocupat în propoziția dată de expresiile simbolizate;

e) modul în care subexpresiile se determină între ele este evidențiat prin simboluri auxiliare; acestea trebuie să corespundă determinărilor din propoziția formalizată.

Problema formalizării unei propoziții are diferite soluții, în funcție de modul în care este analizată propoziția şi de context. De exemplu, să formalizăm propoziția „Dacă John a deschis umbrela atunci plouă sau soarele este prea puternic"

a) propoziții componente: „John a deschis umbrela"; „Plouă"; „Soarele este prea puternic"; functori propoziționali: „dacă... atunci..."; „sau"

b) prin simbolizare, se ajunge la: „John a deschis umbrela" = p; „Plouă" = q; „Soarele este prea puternic" = r; „dacă... atunci..." = ⊃; „sau" = v

c) expresia la care se ajunge în urma simbolizării este: p⊃qvr.

d) cu ajutorul simbolurilor auxiliare se indică raporturile dintre subexpresii, deosebindu-se două variante: (p⊃q)vr; p⊃(qvr). Selectarea variantei de formalizare depinde de context.

Între interpretare şi formalizare există următorul raport:

a) prin interpretarea unei formule *A* se obţin propoziţii a căror formalizare este formula *A*.

b) prin formalizarea unei propoziţii *P* se obţine o formulă care este interpretabilă prin propoziţia *P*.

3. Logica propoziţiilor

3.1. *Valorile logice ale formulelor Lp*

În funcţie de interpretare, o formulă a limbajului propoziţiilor poate avea următoarele valori logice:

a) formula *A* se numeşte *validă* dacă şi numai dacă, pentru orice interpretare a variabilelor, are numai interpretarea *adevărat*. Formulelor valide le corespund funcţii tautologice de diferite argumente. De exemplu, formula „p⊃p" este validă.

b) formula *A* se numeşte *realizabilă* dacă şi numai dacă există interpretări ale variabilelor sale pentru care *A* are interpretarea *adevărat* şi, totodată, există interpretări pentru care *A* admite interpretarea *fals*. Bunăoară, formula „pvq" este realizabilă deoarece pentru I_3, I_2 şi I_1 are interpretarea *adevărat* iar pentru I_0 are interpretarea *fals*.

c) formula *A* se numeşte *irealizabilă* dacă şi numai dacă admite numai interpretarea *fals*. Din această categorie face parte formula „p&~p"

Clasa tuturor formulelor valide din Lp constituie *logica limbajului simbolic al propoziţiilor* sau, mai simplu, *logica propoziţiilor*. De aceea, formulele valide se mai numesc *legi logice*. Problemele principale ale logicii propoziţiilor sunt:

a) *problema deciziei*, care constă în elaborarea unor metode prin care să se stabilească dacă o formulă dată este validă sau nu (dacă aparţine logicii Lp sau nu);

b) *problema selectării*, respectiv, elaborarea unor metode care să permită separarea sau selectarea formulelor valide a Lp. Această problemă vizează generarea unei *liste* a formulelor valide.

3.2. *Metode de decizie în logica propoziţiilor*

Logica simbolică a dezvoltat mai multe metode prin care se poate decide dacă o formulă dată a limbajului propoziţiilor este validă.

a) Metoda matriceală

i) se construieşte tabelul prin care formula dată este interpretată logic; pe ultima linie a tabelului interpretativ apar interpretările formulei corespunzătoare la diferite interpretări ale variabilelor;

ii) se cercetează constantele interpretative care apar pe ultima linie a tabelului interpretativ:

- Dacă apare numai constanta $\top$, *adevărat*, atunci formula este *validă*;
- Dacă apare atât $\top$ cât şi $\bot$, atunci formula dată este *realizabilă*;
- Dacă apare numai constante $\bot$, *fals*, atunci formula este *irealizabilă*.

De exemplu, să decidem asupra formulei A = ~(p⊃q)⊃(q⊃p).

Interpretări	I_3	I_2	I_1	I_0
p	T	T	⊥	⊥
q	T	⊥	T	⊥
p⊃q	T	⊥	T	T
~(p⊃q)	⊥	T	⊥	⊥
q⊃p	T	T	⊥	T
A	T	T	T	T

Pe ultima linie a tabelului apare numai constanta T, prin urmare, formula *A* este lege logică şi aparţine logicii limbajului propoziţiilor.

b) Metoda algebrică. Simbolurile constante ale Lp se elimină după următoarele reguli:

RN1. ~T=⊥
RN2. ~⊥ =T
RD1. AvT = T (*A* este o formulă oarecare).
RD2. Av⊥ = A.

Se ţine seama că disjuncţia este comutativă şi asociativă; T este element absorbant, iar ⊥ este element neutru faţă de disjuncţie. Dacă, în urma calculelor, se obţine T pentru fiecare interpretare a variabilelor din formula dată, atunci formula este lege logică şi reciproc. Să decidem algebric asupra formulei anterioare:

A = ~(p⊃q)⊃(q⊃p)
A = (~pvq)v(~qvp)
I_3: (~TvT)v(~TvT) = (⊥vT)v(⊥vT) = TvT = T
I_2: (~Tv⊥)v(~⊥vT) = (⊥v⊥)v(TvT) = ⊥vT = T
I_1: (~⊥vT)v(~Tv⊥) = (TvT)v(⊥v⊥) = Tv⊥ = T

I_0: $(\sim\bot v\bot)v(\sim\bot v\bot) = (\top v\bot)v(\top v\bot) = \top v\top = \top$.

Formula dată este lege logică deoarece, pentru orice interpretare a variabilelor, s-a obținut interpretarea $\top$.

c) Metoda prescurtată. Regulile de eliminare a simbolurilor constante sunt următoarele:

RN1. $\sim\top = \bot$
RN2. $\sim\bot = \top$
RD1. $A v \top = \top$ (*A* este o formulă oarecare).
RD2. $A v \bot = A$
RC1. $A\&\bot = \bot$
RC2. $A\&\top = A$
RI1. $A \supset \top = \top$
RI2. $\bot \supset A = \top$
RI3. $A \supset \bot = \sim A$
RI4. $\top \supset A = A$
RE1. $\top \equiv A = A$
RE2. $\bot \equiv A = \sim A$ (se ține seama că echivalența este comutativă).

Se parcurg următorii pași:

i) se elimină variabila care are cele mai multe ocurențe;

ii) dacă formulele obținute conțin alte variabile, se reia pasul (i) până la eliminarea tuturor variabilelor;

iii) după eliminarea tuturor variabilelor, dacă se obține ca rezultat numai constanta interpretativă $\top$ atunci formula dată este lege logică şi reciproc.

Să aplicăm metoda prescurtată asupra formulei date mai sus:

$$A = \sim(p \supset q) \supset (q \supset p)$$

$$p=\top: \sim(\top \supset q) \supset (q \supset \top) = \sim q \supset \top = \top$$
$$p=\bot: \sim(\bot \supset q) \supset (q \supset \bot) = \sim \top \supset \sim q = \bot \supset \sim q = \top$$

Deoarece s-a obținut numai rezultatul T, formula dată este validă.

3.3. *Metode de selectare a legilor logicii propozițiilor*

Lista formulelor valide din limbajul propozițiilor este nelimitată. De aceea, o asemenea listă nu poate fi efectiv construită. Logica poate doar elabora metode de generare a listei, astfel încât, să asigure că, prin asemenea metode, nu sunt selectate expresii care nu sunt formule valide şi, pe de altă parte, că, dacă am avea suficient timp la dispoziție, orice formulă validă va fi generată de către metoda respectivă la un moment dat. Prima dintre aceste cerințe este *condiția de consistență*, iar cea de a doua reprezintă *condiția de completitudine* a metodei de selectare a formulelor valide. Împreună, cele două condiții, constituie *condiția de întemeiere*. O metodă de selecție a elementelor unei mulțimi după un anumit criteriu este întemeiată dacă selectează orice element pe care ne-am propus să îl selectăm şi nu selectează nici un element care nu satisface criteriul de selecție. Acestea sunt tocmai condițiile de consistență şi completitudine. Prin urmare, o metodă de selecție este întemeiată dacă şi numai dacă este completă şi consistentă şi reciproc.

Cea mai utilizată metodă de selecție a formulelor valide utilizată în logica simbolică este *metoda axiomatică*. Prin metoda axiomatică, formulele valide sunt selectate pornind de la un număr finit de formule valide numite *axiome*, utilizând un număr finit de reguli de selecție sau de *detaşare*. În urma aplicării metodei axiomatice se obțin *sisteme axiomatice* ale logicii propozițiilor. Un sistem axiomatic *logic* este alcătuit din:

a) o listă finită de *axiome*, care sunt formule valide selectate prin alte mijloace decât cele ale sistemului;

b) o listă finită de *reguli de detaşare* care permit obținerea de noi formule valide pornind de la formulele valide generate deja în cadrul sistemului. Regulile de detaşare sunt formulate în *metalimbaj*;

c) o listă infinită de *teoreme*, care sunt formule derivate în interiorul sistemului axiomatic. Teoremele sunt obținute pornind de la axiome sau de la alte teoreme aplicând regulile de detaşare ale sistemului în cadrul unui proces numit *demonstrație*. Despre o teoremă spunem că este *demonstrată* iar despre o formulă care poate fi derivată prin mijloacele sistemului spunem că este *demonstrabilă* în sistemul respectiv.

De-a lungul timpului, au fost dezvoltate diferite sisteme axiomatice ale logicii propozițiilor. Acestea diferă prin lista de axiome sau prin lista regulilor de detaşare.

a) sistemul axiomatic *Hilbert-Ackermann*

Axiomele sistemului sunt:

HA1. (pvp)⊃p
HA2. p⊃(pvq)
HA3. (pvq)⊃(qvp)
HA4. (p⊃q)⊃((rvp)⊃(rvq))

Regulile de detaşare:

HD1. *Regula modus ponens*: A, A⊃B |- B, (dacă *A* şi A⊃B sunt demonstrabile atunci *B* este demonstrabilă).

HD2. *Regula substituției*: A(...B...) |- A(...C...), unde *B* şi *C* sunt formule iar *B* este peste tot substituită prin *C* în *A*.

b) sistemul axiomatic al lui Frege:

AF1. $p \supset (q \supset p)$
AF2. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
AF3. $(p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r))$
AF4. $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$
AF5. $\sim\sim p \supset p$
AF6. $p \supset \sim\sim p$

Regulile de detaşare sunt, ca mai sus, *modus ponens* şi regula *substituției.*

c) A. Church dezvoltă un sistem axiomatic pentru un limbaj parțial interpretat. El introduce în limbajul propozițiilor constanta *fals*, $\perp$. Axiomele sunt:

AC1. $p \supset (q \supset p)$
AC2. $(r \supset (p \supset q)) \supset ((r \supset p) \supset (r \supset q))$
AC3. $((p \supset \perp) \supset \perp) \supset p$

d) J. Nicod a propus un sistem axiomatic cu o singură axiomă şi o singură constantă:

AN1. $(p/(q/r))/((s/(s/s))/((t/q)/((p/t)/(p/t)))$

În sistemul său, pe lângă regula substituției, apare şi regula de detaşare A, A/(A/C)|-C, care corespunde lui *modus ponens*.

Consistența sistemelor axiomatice ale logicii propozițiilor este asigurată dacă axiomele sunt legi logice şi dacă regulile de detaşare sunt corecte logic. Validitatea axiomelor este verificată utilizând metode de decizie asupra formulelor Lp. Corectitudinea regulilor de detaşare se verifică în felul următor:

a) o regulă de detaşare are următoarea sintaxă: A_i|-B, unde A_i sunt formule date, iar *B* este formula detaşată;

b) se construieşte formula R = (&A_i)⊃B, asupra căreia se decide utilizând metodele de decizie ale logicii propoziţiilor;

c) dacă formula *R* este validă, atunci regula de detaşare este corectă; în alt caz, regula de detaşare nu este corectă.

De bună seamă, dacă axiomele sunt legi logice, metodele de detaşare sunt corecte şi teoremele sunt derivate utilizând numai regulile de detaşare ale sistemului şi axiome sau formule deja demonstrate, atunci orice formulă derivată este lege logică, respectiv, sistemul axiomatic este consistent. Există mai multe demonstraţii ale completitudinii diferitelor sisteme axiomatice ale logicii propoziţiilor. Cu toate acestea, completitudinea este îndoielnică deoarece axiomele conţin un număr redus de variabile propoziţionale distincte, ceea ce pune sub semnul întrebării capacitatea lor de a selecta formulele valide cu un număr foarte mare, chiar nelimitat, de variabile propoziţionale.

Consistenţa şi completitudinea unui sistem axiomatic al logicii simbolice pot fi raportate şi la limbajul natural. Un sistem axiomatic este consistent relativ la limbajul natural dacă selectează numai formule care au ca interpretări naturale tautologii şi este complet dacă reuşeşte să selecteze toate formulele care au drept interpretare naturală tautologii. Cu privire la sistemele axiomatice ale logicii propoziţiilor există îndoieli că ar fi complete faţă de limbajul natural deoarece sunt afectate de paradoxuri care pun în evidenţă faptul că există relaţii între propoziţii care nu pot fi formalizate corect în limbajul propoziţiilor.

Aşa cum remarcă L. Wittgenstein sau M. Bunge, metoda axiomatică nu este necesară în domeniul logicii.

Datorită faptului că logica simbolică este ansamblul formulelor valide, prin axiomatizare nu se aduce un plus de certitudine ci, atât axiomele, cât şi teoremele sunt la fel de justificate epistemologic. De aceea, orice formulă validă poate juca rolul de axiomă. Axiomatizarea nu este decât un mod de prezentare a formulelor logicii, nu un mod de descoperire. Alta este situaţia când axiomele nu sunt legi logice adică, atunci când axiomatizarea este aplicată în alte domenii decât logica. De această dată, gradul de întemeiere al teoremelor este mai mare decât cel al axiomelor, cu alte cuvinte, dacă teoremele sunt consecinţe ale axiomelor, atunci, în măsura în care subiectul cunoscător consideră axiomele adevărate, el este trebuie să admită ca adevărate şi teoremele.

4. Aplicaţii ale logicii propoziţiilor

4.1. *Calculul valorii logice a propoziţiilor*

Dacă formulele limbajelor simbolice nu ar fi interpretabile prin expresii ale limbajului natural, aceste limbaje ar rămâne doar un joc de simboluri fără nici o utilitate. Interpretarea naturală şi formalizarea permit ca, utilizând metodele logicii simbolice, să se determine valoarea logică a expresiilor limbajului natural, cu punerea în evidenţă a tautologiilor. În acest mod, logica simbolică reprezintă un mijloc prin care se construieşte *logica limbajului natural* ca mulţime a tautologiilor.

Tautologiile sunt propoziţii care au valoarea *adevărat* în orice context, adică, indiferent ce s-ar întâmpla în *lumea reală*. De aici rezultă că, dacă formula dintr-un limbaj simbolic corespunzătoare unei propoziţii (prin interpretare sau prin formalizare) este *validă* atunci propoziţia respectivă este tautologie. De aceea, prin interpretarea naturală a unei formule valide se obţin numai tautologii, iar prin formalizarea unei tautologii se obţine o formulă validă.

Calculul valorii logice a propozițiilor prin mijloacele de decizie ale logicii simbolice este posibil dacă se respectă *principiul de corespondență*: valoarea logică a unei formule trebuie să corespundă cu valoarea logică a propozițiilor rezultate prin interpretarea formulei respective, astfel:

Valoarea logică a formulei	**Valoarea logică a interpretării formulei**
Validă	Tautologie
Realizabilă	Factuală
Irealizabilă	Contradicție

De exemplu, să stabilim valoarea logică a propoziției „Dacă plouă, atunci John își deschide umbrela sau plouă" Prin formalizare, se ajunge la formula A = p⊃(qvp). Dacă aplicăm metoda prescurtată de decizie, obținem:

$$p \supset (q \vee p)$$
$$p = T: T \supset (q \vee T) = T \supset T = T.$$
$$p = \bot: \bot \supset (q \vee \bot) = T$$

formula *A* este validă.

Conform principiului de corespondență, propoziția dată este tautologie.

Există, însă, situații în care principiul de corespondență nu este respectat. De pildă, fie propoziția: „Dacă John nu este căsătorit, atunci John este celibatar" Prin formalizare, se obține A = ~p⊃q, care este *realizabilă*. Potrivit principiului de corespondență, propoziția dată ar trebui să fie *factuală*, adică, ar trebui să existe contexte în care să fie adevărată și contexte în care să fie falsă. Cu toate acestea, deoarece a fi celibatar înseamnă a fi necăsătorit, urmează că propoziția dată este tautologie deoarece nu se poate să existe un context în care cineva să nu fie căsătorit și să nu fie celibatar. Prin urmare, principiul de corespondență este încălcat.

Violarea principiului de corespondență, în asemenea cazuri, se datorează faptului că operația de formalizare a propozițiilor în Lp nu ține seama de relațiile care există între propoziții. Deşi nu toate propozițiile sunt independente între ele, chiar dacă sunt diferite, sunt simbolizate prin variabile propoziționale care admit interpretări independente. În cazul de mai sus, cele două propoziții care alcătuiesc propoziția formalizată sunt *contradictorii.* Cu toate acestea, ele au fost simbolizate prin variabile propoziționale diferite care pot fi interpretate logic prin constante interpretative diferite, ajungându-se la nerespectarea principiului corespondenței.

Una din soluțiile prin care s-a încercat depăşirea acestui neajuns a fost *ipoteza atomară* asupra limbajului, potrivit căreia, există un nivel ultim al limbajului, alcătuit din propoziții *atomare* sau *elementare* care nu pot fi analizate în alte propoziții. Formalizarea corectă în limbajul propozițiilor presupune analiza propoziției date în propoziții atomare şi functori propoziționali şi apoi, propozițiile atomare saunt simbolizate prin variabile propoziționale distincte.

Ipoteza atomară nu este susținută de o demonstrație de existență a propozițiilor atomare. Pe de altă parte, adepții acestei ipoteze nu sunt în măsură să dea nici un exemplu de asemenea propoziție, care să nu poată fi analizată în alte propoziții. De pildă, dacă s-ar accepta că o propoziție precum "Marte este o planetă" este atomară, nu s-ar putea explica de ce o asemenea propoziție se lasă analizată prin propoziții precum: "Marte se roteşte în jurul Soarelui" şi "Marte nu are lumină proprie" etc. În fapt, orice propoziție P poate fi analizată prin alte propoziții, cum ar fi "P&Q", "P&Q" etc., prin urmare, nu poate fi atins un nivel ultim al limbajului.

Chiar dacă ar exista propoziții atomare, pentru ca simbolizarea lor prin variabile distincte să fie corectă (adică să respecte principiul corespondenței), ar trebui ca propozițiile atomare să fie independente între ele, or nu există

nici o demonstrație în acest sens, așa încât teza independenței propozițiilor atomare rămâne la nivel speculativ. În consecință, ipoteza atomară asupra limbajului nu poate fi acceptată.

Singura cale de evitare a violării principiului corespondenței în urma formalizării este să se accepte regula că numai propozițiile independente să fie simbolizate prin variabile propoziționale care admit interpretări logice independente. Dacă propoziția dată conține propoziții care sunt dependente, atunci se pot adopta două strategii de simbolizare:

a) simbolizarea celor două propoziții prin formule care să se afle într-o relație logică analogă cu relația dintre cele două propoziții;

b) simbolizarea celor două propoziții prin variabile diferite dar, atunci când variabilele sunt interpretate logic, să se țină seama că nu toate interpretările sunt posibile, ci să se admită numai interpretările logice care corespund relației dintre cele două propoziții.

În exemplul de mai sus, deoarece propozițiile componente sunt contradictorii, dacă aplicăm metoda (a) de simbolizare atunci, dacă una dintre propoziții este simbolizată prin variabila „p", cealaltă trebuie formalizată prin formula „~p", pentru a respecta relația dintre propozițiile respective. În acest mod se ajunge la formula „~p⊃~p", care este validă, cu rezultatul că propoziția dată este tautologie, salvând principiul de corespondență.

Dacă aplicăm strategia (b), atunci formula obținută prin formalizarea propoziției date rămâne aceeași, respectiv, „~p⊃q", dar, atunci când se decide asupra ei, trebuie să se țină seama că interpretările logice ale celor două variabile trebuie să fie diferite, pentru a respecta relația de contradicție, obținându-se rezultatul:

Interpretări	I_3	I_2	I_1	I_0
p	T	T	⊥	⊥
q	T	⊥	T	⊥
~p		⊥	T	
~p⊃q	-	T	T	-

Formula este validă, prin urmare, propoziția dată este tautologie.

4.2. *Calculul valorii logice a raționamentelor*

Raționamentele *simple* sunt elemente ale produsului cartezian **R** = [**P**]x**P**, unde **P** = mulțimea propozițiilor şi [**P**] = mulțimea părților mulțimii propozițiilor, respectiv, sunt sisteme de forma R = <{P_1, P_2, …, P_n}, Q>, unde P_i se numesc *premise*, iar *Q* este *concluzia raționamentului*. Un raționament este *corect* dacă şi numai dacă, în cazul în care toate premisele sunt adevărate, concluzia sa este, de asemenea, adevărată. Prin urmare, raționamentele corecte sunt o parte a produsului cartezian **R**, adică, reprezintă o *relație* între mulțimi de propoziții şi propoziții, numită *relația de deducere*. Dacă raționamentul „<{P_1, P_2, …, P_n}, Q>" este corect, atunci relația de deducere de la mulțimea premiselor la concluzie, {P_1, P_2, …, P_n}|-Q, are loc şi reciproc.

De exemplu, fie raționamentul corect:

Toate balenele sunt mamifere.
Toate balenele sunt animale acvatice.
**Unele mamifere sunt animale acvatice.

Între mulțimea premiselor şi concluzia acestui raționament are loc relația de deducere: „{Toate balenele sunt mamifere; Toate balenele sunt animale acvatice}|- Unele mamifere sunt animale acvatice"

Un raționament este corect în cazul în care concluzia sa este *subalternă* sau *consecință* a conjuncției premiselor sale. De aici rezultă că relația de deducere între mulțimea premiselor şi concluzia unui raționament este echivalentă cu relația de subalternare dintre conjuncția premiselor şi concluzia raționamentului respectiv:

$(\{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \vdash Q) \equiv$ „Q este subalterna propoziției $\&_i P_i$"

Deoarece o propoziție Q este subalterna unei propoziții P dacă şi numai dacă propoziția „Dacă P atunci Q" este tautologie, urmează că, raționamentul $R =$ „$<\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}, Q>$ este corect dacă şi numai dacă propoziția „Dacă $\&_i P_i$, atunci Q" este tautologie.

Problema determinării corectitudinii unui raționament (sau problema determinării relației de deducere) este redusă, astfel, la problema deciziei asupra valorii logice a unei propoziții condiționale. Prin urmare, pentru a decide asupra corectitudinii raționamentului R, se parcurg următorii paşi:

a) formalizarea în limbajul propozițiilor a propoziției condiționale asociate raționamentului;

b) decizia asupra formulei obținute;

c) dacă formula este validă, atunci raționamentul este corect.

De exemplu, să stabilim corectitudinea raționamentului:

Toți oamenii sunt raționali.
Socrate este om.
**Socrate este rațional.

Mai întâi, exprimăm propozițiile care compun raționamentul cu ajutorul propozițiilor simple.

$\&_i$(Dacă a_i este om, atunci a_i este rațional)

Socrate este om.
**Socrate este raţional.

Prin formalizare, se obţine formula: $(\&_i(p_i \supset q_i)\&p_0) \supset q_0$. Să decidem prin metoda prescurtată:

$$q_0 = T: T$$

$$q_0 = \perp: \sim((\&_{i \neq k}(p_i \supset q_i)\&\sim p_0\&p_0) = v_{i \neq k}(p_i\&\sim q_i)v\sim p_0 v p_0 = T$$

Formula obţinută în urma formalizării raţionamentului dat este validă, prin urmare, raţionamentul dat este corect (între mulţimea premiselor şi concluzia raţionamentului are loc relaţia de deducere).

Există raţionamente incorecte cărora le corespund, prin formalizare, formule valide sau există formule valide care au drept interpretare raţionamente incorecte. De exemplu, fie raţionamentul:

Socrate este atenian.
Raţionamentul (Pământul este o planetă/Socrate este atenian) este corect.

Un asemenea raţionament nu este corect deoarece din aceea că o propoziţie este adevărată nu rezultă că un raţionament care are acea propoziţie drept concluzie este corect. Prin formalizare, se ajunge la: $A = p \supset (q \supset p)$, care este o lege a logicii propoziţiilor. Iată că există situaţii în care, deşi un raţionament nu este corect, formula corespunzătoare este validă. Problema poate fi inversată: există formule valide ale limbajului propoziţiilor care conţin implicaţia materială, astfel că, dacă simbolul implicaţiei materiale este interpretat prin relaţia de deducere, se ajunge la propoziţii false sau la raţionamente incorecte. Asemenea formule sunt numite *paradoxuri ale implicaţiei materiale*. De pildă, formule precum:

$p \supset (q \supset p)$

$\sim p \supset (p \supset q)$

$(p \supset q) v (p \supset \sim q)$

$(p \supset q) v (q \supset p)$ etc. sunt paradoxuri ale implicației materiale.

Existența acestor paradoxuri pune sub îndoială capacitatea logicii simbolice de a da o soluție pentru problema corectitudinii raționamentelor; nu mai este sigur că raționamentele rezultate prin interpretarea formulelor valide sunt corecte sau că, dacă în urma formalizării unui raționament se obține o formulă validă, acel raționament este corect. De aceea, logica simbolică trebuie să elimine paradoxurile de acest tip.

Una dintre soluțiile la paradoxurile implicației materiale a fost propusă de către C.I. Lewis. Acesta consideră că implicația materială nu este potrivită pentru a simboliza relația de deducere, deoarece implicația materială este o funcție de adevăr, pe când relația de deducere nu are caracter funcțional. De aceea, pentru a simboliza corect relația de deducere, limbajul propozițiilor trebuie îmbogățit cu o nouă constantă, introdusă tocmai pentru a da seama de relația de deducere, pe care Lewis o numește *implicație strictă.*

La vocabularul limbajului propozițiilor Lewis adaugă constanta implicației stricte, „$\rightarrow$", a cărei interpretare logică este dată de tabelul:

Interpretări	I_3	I_2	I_1	I_0
p	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
q	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$p \rightarrow q$	nedeterminat	$\bot$	nedeterminat	nedeterminat

Numai pentru interpretarea $I_2 = <\top, \bot>$, implicația strictă are interpretarea *fals*, în vreme ce, pentru celelalte

interpretări, aceasta nu are o interpretare determinată, nefiind o funcție de adevăr.

Pornind de la teza lui Aristotel că, într-un raționament corect, concluzia urmează cu necesitate din premise, Lewis atribuie implicației stricte și o interpretare modală. Odată ce implicația strictă are rolul de a simboliza relația de deducere, urmează că poate fi interpretată atât printr-o valoare logică, tautologia, cât și printr-o valoare modală, necesitatea:

$p \rightarrow q \equiv$ „$p \supset q$" este tautologie;
$p \rightarrow q \equiv$ „$p \supset q$" este necesar adevărată.

Adică, implicația strictă poate fi redusă la implicația materială și tautologie sau la implicația strictă și necesitate. Deși implicația materială este funcție de adevăr, nici tautologia, nici necesitate nu sunt funcții de adevăr, așa încât, ele nu pot fi reduse la celelalte constante ale limbajului propozițiilor. Prin urmare, implicația strictă nu poate fi redusă la alte constante ale limbajului propozițiilor.

În schimb, Lewis argumentează că implicația strictă poate fi exprimată cu mijloacele limbajului propozițiilor dacă se admite o altă interpretare logică a simbolurilor acesteia, diferită de interpretarea „clasică" Bunăoară, dacă variabilele sunt interpretate pe o mulțime conținând trei (sau mai multe) valori *de adevăr*, nu două, ca în interpretarea clasică, atunci necesitatea este o funcție de adevăr. Admițând o asemenea interpretare, implicația strictă poate fi exprimată prin constante care admit ca interpretare funcții de adevăr, cum sunt implicația (interpretată printr-o funcție de adevăr polivalentă) și necesitatea. În acest fel, interpretarea implicației stricte devine determinată pentru toate interpretările variabilelor. Lewis sprijină teza că relația de deducere nu poate fi simbolizată cu mijloacele unei logici bivalente, ci necesită o logică polivalentă. Dar, dacă analizăm

valorile propuse de Lewis, constatăm că acestea nu sunt valori de adevăr ci, mai curând, valori epistemice. De pildă, când are în vedere logica trivalentă, cele trei valori sunt *adevărat cu certitudine*, *fals cu certitudine* şi *îndoielnic*. Acestea nu privesc valoarea de adevăr a propoziţiei, ci aprecierea evaluatorului asupra adevărului propoziţiei.

Deşi utilizarea implicaţiei stricte pentru simbolizarea relaţiei de deducere evită paradoxurile implicaţiei materiale, metoda propusă de Lewis generează alte paradoxuri, numite *paradoxurile implicaţiei stricte*. Acestea sunt formule valide care utilizează implicaţia strictă, ale căror interpretări naturale nu sunt propoziţii adevărate, încălcându-se principiul de corespondenţă. Din această categorie fac parte formulele:

$NP \rightarrow (q \rightarrow p)$, în cazul în care concluzia unui raţionament este necesară, atunci raţionamentul este corect;

$\sim Mp \rightarrow (p \rightarrow q)$, raţionamentele cu premise imposibile sunt corecte.

Lewis alege să nu dea importanţă acestui tip de paradoxuri deoarece, în sistemul lui, necesitatea coincide cu tautologia şi imposibilitatea este acelaşi lucru cu contradicţia. În viziunea lui Lewis, numai tautologiile sunt propoziţii adevărate în chip necesar şi reciproc. În acest fel, paradoxurile implicaţiei stricte sunt interpretate astfel: „Orice raţionament care are drept concluzie o tautologie este corect" şi „Orice raţionament ale cărui premise sunt contradictorii este corect", dispărând caracterul lor paradoxal.

O asemenea abordare nu evită paradoxul epistemic generat de formulele respective. Chiar Lewis admite interpretarea epistemică a implicaţiei stricte, atunci când arată că aceasta poate fi redusă la alte constante dacă valorile de adevăr sunt substituite prin valori epistemice. În acest fel, el stabileşte o corelaţie între valorile modale ale propoziţiilor şi

atitudinile epistemice justificate față de acestea. Numai propozițiile necesare sunt certe în mod justificat. Dar, dacă necesitatea este identificată cu tautologia, urmează că numai tautologiile sunt certe în mod justificat adică, numai legile logicii sunt întemeiate. Enunțurile oricărei alte științe, care nu poate fi scufundată în logică, trebuie privite cu îndoială, asupra acestora putem avea doar certitudini nejustificate. Prin identificarea propozițiilor necesare cu tautologiile, se ajunge la rezultatul lui Hume, reluat mai târziu de alți logicieni și epistemologi, că științele naturii nu sunt întemeiate.

Kant, având în vedere succesele fizicii timpului său, a respins rezultatul investigației lui Hume și a considerat fizica întemeiată, întrebându-se *cum* anume este întemeiată. Răspunsul său este că, pentru ca fizica să fie întemeiată, trebuie să existe o specie aparte de propoziții, pe care le numește *sintetice a priori*. Aceste propoziții nu sunt analitice, adică, nu sunt tautologii și sunt necesare, deoarece sunt *a priori*. Fizica poate fi întemeiată numai dacă există propoziții necesare care nu sunt tautologii. Problema care apare este cum pot fi întemeiate asemenea propoziții? Kant consideră că trebuie să existe un factor aparte care întemeiază propozițiile sintetice *a priori*, pe care îl notează cu *X*. Întemeierea fizicii constă în a determina factorul kantian *X*.

Paradoxurile implicației stricte pot fi soluționate arătând că implicația strictă nu admite o interpretare modală. În acest fel, paradoxurile implicației stricte sunt evitate. Rolul implicației stricte este de a simboliza relația de deducere:

$\{P_1, \ldots, P_n\}|\text{-}Q \equiv (p_1\&\ldots\&p_n)\rightarrow q$, unde P_i sunt interpretările naturale ale variabilelor p_i și Q este interpretarea naturală a variabilei q.

$\{P_1, \ldots, P_n\}|\text{-}Q \equiv$ „$(P_1\&\ldots\&P_n)\supset Q$" este tautologie.

„$(P_1\&\ldots\&P_n)\supset Q$" este tautologie $\equiv$ „$(p_1\&\ldots\&p_n)\supset q$" este validă.

$(p_1\&\ldots\&p_n)\rightarrow q \equiv$ „$(p_1\&\ldots\&p_n)\supset q$" este validă.
„$(p_1\&\ldots\&p_n)\supset q$" este validă $=_{not}$ $V((p_1\&\ldots\&p_n)\supset q)$
$(p_1\&\ldots\&p_n)\rightarrow q \equiv V((p_1\&\ldots\&p_n)\supset q)$

Implicația strictă poate fi redusă la implicația materială și validitate. Reducerea la implicația strictă și necesitate nu se susține. Aristotel spunea pe bună dreptate că, într-un raționament corect, concluzia rezultă cu necesitate din premise, dar, de aici, nu rezultă echivalența ci doar implicația:

$$\{P_1, \ldots, P_n\}\vdash Q \supset (p_1\&\ldots\&p_n)\supset Nq$$
$$(p_1\&\ldots\&p_n)\rightarrow q \supset (p_1\&\ldots\&p_n)\supset Nq$$

Relația corectă între implicația strictă și necesitate este: „$(\sim p\rightarrow p)\supset Np$" și nicidecum „$(\sim p\rightarrow p) \equiv Np$" De aceea, teza reducerii implicației stricte la implicația materială și la necesitate nu se susține. Lewis a adăugat, cu de la sine putere, un „și reciproc" la teza lui Aristotel.

Odată ce interpretarea implicației stricte prin valori modale nu se susține, urmează că nici reducerea implicației stricte la funcții trivalente și nici consecințele epistemice ale paradoxurilor implicației stricte nu pot fi susținute. Vom arăta că implicația strictă poate fi redusă la funcții de adevăr în cadrul logicii bivalente, fără a avea nevoie de teza exotică a pluralității valorilor de adevăr.

Anterior, am ajuns la rezultatul:

$$(p_1\&\ldots\&p_n)\rightarrow q \equiv V((p_1\&\ldots\&p_n)\supset q)$$

O formulă este validă dacă și numai dacă are interpretarea „adevărat" pentru *orice* interpretare a variabilelor propoziționale. Fie o formulă oarecare $A(p_1, p_n)$, unde p_i sunt variabilele propoziționale din componența ei. În acest caz, are loc:

$V(A(p_1, \ldots, p_n)) \equiv (p_1, \ldots, p_n)A(p_1, \ldots, p_n)$, *A* este validă dacă şi numai dacă, pentru orice interpretare a variabilelor sale propoziţionale *A* are interpretarea T.

Urmează că implicaţia strictă poate fi redusă la implicaţia materială şi la *cuantificarea variabilelor propoziţionale*:

$$p \rightarrow q \equiv V(p \supset q)$$
$$V(p \supset q) \equiv (p,q)(p \supset q)$$
$$p \rightarrow q \equiv (p,q)(p \supset q), \text{ respectiv,}$$

Implicaţia strictă = implicaţia materială + cuantificarea variabilelor propoziţionale.

Relaţia de deducere este analizată prin implicaţia materială şi cuantificarea variabilelor propoziţionale:

$$\{P_1, \ldots, P_n\} \vdash Q \equiv (p_i,q)(\&_i p_i \supset q)$$

Am obţinut rezultatul că, pentru a formaliza corect relaţia de deducere în limbajul propoziţiilor, nu avem nevoie nici de constante suplimentare, nici modificarea domeniului de interpretare logică prin introducerea mai multor constante interpretative decât adevăratul şi falsul, ci doar de admiterea cuantificării variabilelor propoziţionale.

Metoda cuantificării variabilelor propoziţionale permite decizia asupra corectitudinii raţionamentelor în interiorul logicii propoziţiilor. Pot fi urmate două strategii:

1) vocabularul limbajului propoziţiilor este îmbogăţit cu un simbol primitiv pentru cuantificatorul universal sau cel existenţial, în vreme ce al doilea cuantificator rămâne un simbol derivat, putând fi definit cu ajutorul cuantificatorului primitiv şi a negaţiei. Totodată, trebuie modificată lista regulilor de transformare. Sintaxa Lp se modifică astfel:

a) la lista simbolurilor primitive se adaugă cuantificatorul existențial, $\exists$.

b) la lista regulilor de transformare se adaugă:

Dacă A(...**Var(prop)**...) este o formulă bine formată, atunci ($\exists$(**Var(prop)**)A(...**Var(prop)**...)$\in$**EBF**)

c) la lista simbolurilor derivate se adaugă:

$$(p)A(\ldots p\ldots) =_{df} \sim(\exists p)\sim A(\ldots p\ldots)$$

Într-un limbaj al propozițiilor astfel îmbogățit, pot fi exprimate propoziții compuse care nu sunt funcții de adevăr în raport cu propozițiile simple componente, de pildă:

„*P* este tautologie" $\equiv (p)p$
„*P* este contradicție" $\equiv (p)\sim p$
„*P* este factuală" $\equiv (\exists p)p\&(\exists p)\sim p$.

Dacă dorim să stabilim valoarea logică a propozițiilor de mai sus, acestea sunt formalizate conform regulilor amintite şi, asupra formulelor obținute, se aplică metodele de decizie ale logicii propozițiilor.

2) Limbajul propozițiilor rămâne neschimbat, fără a fi îmbogățit cu simboluri pentru cuantificatori, dar admițând că formulele sale nu pot avea ca interpretare judecăți privind valoarea logică a propozițiilor şi acestea nu pot fi formalizate în Lp. Pentru a ilustra aplicarea logicii propozițiilor în asemenea condiții, să luăm ca exemplu, propozițiile de forma „*P* este tautologie":

a) propoziția *P* este formalizată, obținându-se formula „$A(p_1, \ldots, p_n)$"

b) se construieşte formula *auxiliară* „$(p_1, \ldots, p_n)A(p_1, \ldots, p_n)$" Această formulă nu aparţine Lp, ci doar serveşte procesului de decizie logică.

c) se decide asupra formulei auxiliare „$(p_1, \ldots, p_n)A(p_1, \ldots, p_n)$", stabilindu-se valoarea logică a propoziţiei date.

Stabilirea valorii logice a formulelor care conţin cuantificatori necesită noi metode de decizie, indiferent dacă aceste formule sunt admise în interiorul Lp sau sunt considerate auxiliare. Interpretările sistemului de variabile propoziţionale care apar într-o formulă „$A(p_1, \ldots, p_n)$" se divid în două clase disjuncte şi complementare: clasa interpretărilor pentru care formula A are interpretarea *adevărat*, $I_\top$, şi clasa interpretărilor pentru care A are interpretarea *fals*, $I_\bot$. O formulă cuantificată universal are următoarea interpretare:

$$(p_1, \ldots, p_n)A(p_1, \ldots, p_n)$$
$$I_\top: \top$$
$$I_\bot: \bot$$

A are numai interpretarea *adevărat* dacă şi numai dacă clasa $I_\bot$ este vidă şi are numai interpretarea fals dacă şi numai dacă clasa $I_\top$ este vidă:

$I_\bot = \varnothing$: A este validă.
$I_\top = \varnothing$: A este irealizabilă.
$\sim(I_\top = \varnothing)$ & $\sim(I_\top = \varnothing)$: A este realizabilă.

Convenim să notăm: $(I=\varnothing) =_{not} \neg I$ şi $\sim(I=\varnothing) =_{not} I$.

Matriceal, decizia asupra unei formule cuantificate universal şi asupra uneia cuantificate existenţial decurge astfel:

Interpretări	I_T	$I_\perp$	Condiții
$A(p_1, \ldots, p_n)$	T	$\perp$	
$(p_1, \ldots, p_n)A(p_1, \ldots, p_n)$	T		$\neg I_\perp$
	$\perp$	$\perp$	$I_\perp$
$(\exists p_1, \ldots, p_n)A(p_1, \ldots, p_n)$		$\perp$	$\neg I_T$
	T	T	I_T

Formula cuantificată universal este validă când clasa interpretărilor $I_\perp$ este vidă şi este irealizabilă dacă $I_\perp$ nu este vidă. În schimb, formula cuantificată existenţial este irealizabilă dacă I_T este vidă şi este validă dacă I_T nu este vidă.

Cuantificarea variabilelor propoziţionale elimină paradoxurile implicaţiei materiale. De exemplu, dacă admitem că numai implicaţia materială cuantificată universal poate fi interpretată prin relaţia de deducere, atunci formula paradoxală „$p\supset(q\supset p)$" nu are ca interpretări raţionamente şi nu se ajunge la paradox. În schimb, formula „$p\supset(p,q)(q\supset p)$" care admite ca interpretare raţionamente, nu este validă, aşa încât, nu poate fi interpretată prin relaţia de deducere, dispărând paradoxul:

Interpretări	I_3	I_2	I_1	I_0	Condiții
p	T	T	$\perp$	$\perp$	
q	T	$\perp$	T	$\perp$	
$q\supset p$	T	T	$\perp$	T	
$(p,q)(q\supset p)$	T	T		T	$\neg I_1$
	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	I_1
$p\supset(p,q)(q\supset p)$	T	T		T	$\neg I_1$
	$\perp$	$\perp$	T	T	I_1

Dacă există interpretări I_1 şi dacă *p* nu este interpretată printr-o contradicţie, atunci raţionamentele obţinute prin interpretare sunt incorecte. Constatăm că, în anumite condiţii,

s-ar putea obține raționamente corecte fără paradox. De exemplu, următorul raționament este corect:

Figura geometrică *G* este poligon.
(Figura geometrică *G* este triunghi/Figura geometrică *G* este poligon).

Se poate lesne constata că nu toate formulele care conțin implicația materială generează paradoxuri atunci când această constantă este interpretată prin relația de deducere. De exemplu, raționamentele obținute prin interpretarea formulei valide *modus ponens*, MP = (p&(p⊃q))⊃q, sunt corecte. Urmează că există ocurențe ale implicației materiale care pot fi interpretate prin relația de deducere fără a genera paradoxuri sau fără a viola principiul de corespondență așa cum există ocurențe paradoxale ale implicației materiale în formulele logicii propozițiilor. Convenim să numim *tari* acele ocurențe ale implicației materiale care nu sunt paradoxale, respectiv, acele ocurențe care suportă interpretarea prin relația de deducere fără a încălca principiul de corespondență.

Una dintre problemele importante ale logicii propozițiilor, care permite selectarea formulelor care pot fi interpretate prin raționamente, o constituie determinarea caracterului paradoxal al ocurențelor implicației materiale. Ținând seama de cele de mai sus, o ocurență a implicației materiale într-o formulă „A(...p⊃q...)" poate fi interpretată prin relația de deducere fără paradox, adică, este o ocurență *tare* a implicației materiale, dacă și numai dacă formula „A(...p⊃q...) ≡ A(...(p,q)(p⊃q)...)" este validă. Dacă *A* este validă atunci, condiția necesară și suficientă pentru ca o ocurență a implicației materiale în *A* să fie tare este ca formula „A(...(p,q)(p⊃q)...)" să fie validă.

De exemplu, să verificăm dacă prima ocurență a implicației materiale în formula *MP* este tare. Deoarece *MP*

este validă, condiția de tărie pentru prima ocurență este ca formula auxiliară MP1 = (p&(p,q)(p⊃q))⊃q să fie validă:

Interpretări	I_3	I_2	I_1	I_0	Condiții
p	⊤	⊤	⊥	⊥	
q	⊤	⊥	⊤	⊥	
p⊃q	⊤	⊥	⊤	⊤	
(p,q)(p⊃q)	⊤		⊤	⊤	$\neg I_2$
	⊥	⊥	⊥	⊥	I_2
p&(p,q)(p⊃q)	⊤		⊥	⊥	$\neg I_2$
	⊥	⊥	⊥	⊥	I_2
p&(p,q)(p⊃q)⊃q	⊤		⊤	⊤	$\neg I_2$
	⊤	⊤	⊤	⊤	I_2

Formula MP1 este validă, prin urmare, prima ocurență a implicației materiale din formula *MP* nu este paradoxală.

Unele formule conțin atât ocurențe tari cât și ocurențe slabe ale implicației materiale și există situații în care ocurențele implicației materiale sunt tari numai în anumite combinații. De exemplu, dacă avem în vedere *legea tranzitivității* implicației materiale, $((p\supset_1 q)\&(q\supset_2 r))\supset_3(p\supset_4 r)$, în vreme ce toate cele patru ocurențe ale implicației materiale, luate împreună, sunt tari, combinațiile (1, 4), (2, 4) sau (4) sunt paradoxale. De aceea, interpretarea „((P|-Q)&(Q|-R))|-(P|-R)" este neparadoxală, în vreme ce interpretări precum „((P|-Q)&(Q⊃R))|-(P|-R)" constituie paradoxuri.

Stabilirea corectitudinii raționamentelor cu mijloacele logicii propozițiilor presupune verificarea tăriei ocurențelor implicației materiale prin care este simbolizată relația de deducere, parcurgând următorii pași:

a) raționamentul dat este formalizat în Lp utilizând implicația materială pentru a simboliza relația de deducere. Se obține formula *A*;

b) se decide asupra formulei *A*. Dacă *A* este validă, atunci se trece la pasul următor; dacă *A* nu este validă, atunci raționamentul dat nu este corect;

c) se verifică tăria ocurențelor implicației materiale prin care a fost simbolizată relația de deducere. Raționamentul dat este corect în condițiile în care ocurențele implicației materiale sunt tari.

De exemplu, să stabilim condițiile în care raționamentul:

(Ion este la Ploieşti/**Ion este la Piteşti) sau (Ion este la Ploieşti/**Ion nu este la Piteşti)

este corect. Urmăm paşii menționați mai sus:

a) A = (p⊃q)v(p⊃~q);

b) *A* este validă;

c) stabilirea condițiilor în care cele două ocurențe ale implicației materiale sunt neparadoxale. În acest scop, trebuie să se decidă asupra formulei A = (p,q)(p⊃q)v(p,q)(p⊃~q).

Interpretări	I_3	I_2	I_1	I_0	**Condiții**
p	⊤	⊤	⊥	⊥	
q	⊤	⊥	⊤	⊥	
~q	⊥	⊤	⊥	⊤	
p⊃q	⊤	⊥	⊤	⊤	
(p,q)(p⊃q)	⊤		⊤	⊤	$\neg I_2$
	⊥	⊥	⊥	⊥	I_2
p⊃~q	⊥	⊤	⊤	⊤	
(p,q)(p⊃~q)		⊤	⊤	⊤	$\neg I_3$
	⊥	⊥	⊥	⊥	I_3
A	⊤	⊤	⊤	⊤	$\neg I_2 v \neg I_3$
	⊥	⊥	⊥	⊥	$I_2 v I_3$

Am obținut rezultatul că ocurențele implicației materiale din formula A sunt tari dacă şi numai dacă una dintre clasele de interpretări I_3 sau I_2 este vidă, respectiv, dacă propozițiile „Ion este la Ploieşti" şi „Ion este la Piteşti" sunt contrare sau dacă a doua propoziție este subalternă față de prima. Datorită faptului că propozițiile sunt contrare (nu se poate ca, în acelaşi context, Ion să se afle atât la Ploieşti cât şi la Piteşti), raționamentul dat satisface condiția de corectitudine, fiind un raționament corect.

MODALITĂȚI

Logica modală constă în ansamblul formulelor valide aparținând *limbajului simbolic modal*. Limbajul simbolic modal reprezintă o extensie a limbajului propozițiilor, obținută prin adăugarea la vocabularul Lp a unor constante care primesc drept interpretare operatori modali.

1. Sintaxa limbajului modal

1.1. *Lista simbolurilor primitive*

a) simboluri variabile: p, q, r...
b) simboluri constante:
-negația: ~
-posibilitatea: M
-disjuncția: v
c) simboluri auxiliare: (,).

1.2. *Lista regulilor de bine formare*

p, q, r ∈ **EBF**

1.3. *Lista regulilor de transformare*

a) Dacă A∈**EBF** atunci ~A∈**EBF**.
b) Dacă A∈**EBF** atunci MA∈**EBF**.
c) Dacă A∈**EBF** şi B∈**EBF** atunci (AvB)∈**EBF**
d) Dacă A∈ **EBF** atunci (A)∈**EBF**.

1.4. *Lista simbolurilor derivate*

a) &, ⊃, ≡ - au aceleaşi definiţii ca în Lp;

b) NA $=_{df}$ ~M~A, *N* este constanta „necesar", NA = „*A* este necesar adevărată"

2. Semantica limbajului modal

2.1. *Interpretarea logică*

Interpretarea logică a variabilelor limbajului modal este aceeaşi cu interpretarea logică a variabilelor limbajului propoziţiilor, domeniul lor de interpretare fiind **V** = {⊤, ⊥}, unde ⊤ = adevărat; ⊥ = fals. Constantele care apar în Lp îşi păstrează interpretarea şi în limbajul modal, Lm. Singurele diferenţe interpretative între limbajul modal şi cel propoziţional îl reprezintă constantele modale, *M* şi *N*.

Constanta *M*, a posibilităţii, are interpretarea intuitivă „posibil adevărat", adică, o formulă „MA" primeşte interpretarea: „Este posibil ca *A* să aibă interpretarea ⊤" Dacă p_i sunt variabilele care apar în *A*, atunci interpretarea formulei „MA" este: „Există o interpretare a variabilelor p_i pentru care *A* are interpretarea ⊤" De aici urmează:

$$MA \equiv (\exists p_i)A(p_i)$$

În această interpretare, constanta posibilităţii este eliminată cu ajutorul cuantificării existenţiale a variabilelor propoziţionale. La fel, constanta necesităţii este eliminată prin intermediul cuantificării universale:

$$NA \equiv \sim M \sim A$$
$$NA \equiv \sim(\exists p_i)\sim A(p_i) \equiv (p_i)A(p_i)$$

Dacă se acceptă o asemenea interpretare reducționistă, calculul interpretărilor formulelor care conțin constante modale are loc conform metodelor dezvoltate pentru interpretarea formulelor care conțin cuantificatori ai variabilelor propoziționale. De exemplu, să calculăm interpretarea formulei:

Np⊃Mp, „Dacă o propoziție este necesară atunci, acea propoziție este posibilă"

Interpretări	I_1	I_0	**Condiții**
p	⊤	⊥	
Np	⊤		$\neg I_0 \& I_1$
	⊥	⊥	I_0
Mp	⊤	⊤	I_1
		⊥	$\neg I_1 \& I_0$
Np⊃Mp	⊤	⊤	$\neg I_0 \vee \neg I_1$
	⊤	⊤	$I_0 \& I_1$

Formula dată are interpretarea ⊤ pentru orice interpretare a variabilei *p*.

2.2. *Semantica lumilor posibile*

Interpretarea constantelor modale dezvoltată mai sus duce la identificarea formulelor necesare cu formulele valide și, urmând principiul corespondenței, la identificarea propozițiilor necesar adevărate cu tautologiile. În acest mod, se ajunge la următoarele coincidențe privind valorile logice și modale ale propozițiilor:

tautologii	factuale	contradicții
necesar adevărate	contingent adevărate	
posibil adevărate		imposibil adevărate

Conform interpretării reducționiste numai tautologiile sunt necesar adevărate și numai propozițiile imposibil adevărate sunt contradicții. Am văzut că această interpretare este generatoare de paradoxuri, cum sunt paradoxurile implicației stricte. Pe de altă parte, deoarece numai propozițiile necesare sunt certe în mod justificat, ar urma că certitudinile noastre sunt îndreptățite numai în ce privește tautologiile, în vreme ce, pentru toate celelalte propoziții, atitudinea rațională este îndoiala. Urmează că numai logica este întemeiată sau, condiția de întemeiere a unei teorii este ca aceasta să fie scufundată în logică să fie, în ultimă instanță, o teorie logică.

Primul care a observat acest paradox epistemic, echivalent cu paradoxurile implicației stricte, a fost I. Kant. Acesta a propus evitarea coincidenței între tautologii (propoziții analitice, în terminologia lui) și propoziții necesare (*a priori*) prin postularea existenței unei categorii aparte de propoziții, respectiv, propozițiile *sintetice a priori*, care nu sunt tautologii dar sunt necesare. În acest fel, ar exista propoziții, diferite de cele logice, certe în mod justificat. Gânditorul de la Königsberg modifică raportul între valorile logice și cele modale ale propozițiilor, astfel:

<table>
<tr><td>tautologii</td><td colspan="2">factuale</td><td>contradicții</td></tr>
<tr><td colspan="2">necesare</td><td colspan="2">contingente</td></tr>
<tr><td colspan="3">posibile</td><td>imposibile</td></tr>
</table>

Kant propune o justificare psihologizantă a propozițiilor *sintetice a priori*, (propoziții care nu sunt tautologii dar sunt necesar adevărate), singura posibilă în sistemul său logico-epistemic, deoarece Kant nu dă nici o teoremă de existență a unor asemenea propoziții, adică, nu este clar că ele ar exista și nu întreprinde o analiză logică a lor; ceea ce nu există nu poate fi analizat logic, doar psihologic.

Paradoxurile implicației stricte sunt eliminate dacă tautologiile nu coincid cu propozițiile necesar adevărate, respectiv, în cazul în care constanta „necesar" nu primește interpretarea T pentru orice interpretare a variabilelor, ci numai dacă acestea satisfac anumite condiții sau constrângeri, *X* (pentru a utiliza notația kantiană).

Formulele cuantificate universal pot fi dezvoltate cu ajutorul conjuncției:

$$(p_i)A(p_i) \equiv \&_k A(p_i)I_k$$

De exemplu, formula „(p,q)(p⊃q)" reprezintă conjuncția:

$(p,q)(p\supset q) = (T\supset T)I_3\&(T\supset \perp)I_2\&(\perp\supset T)I_1\&(\perp\supset\perp)I_0$, unde, coeficientul I_k este nul dacă clasa de interpretări I_k a sistemului de variabile <p,q> este vidă.

Pe de altă parte, are loc:

$\&_k A(p_i)I_k \equiv \&_k((\&_i e_{ik}p_{ik})\supset A(p_i))I_k$, unde e_{ik} este afirmația dacă $p_i=T$ în interpretarea I_k și este negația dacă $p_i=\perp$ în interpretarea I_k. În acest caz,

$\&_i e_{ik}p_{ik} = T$ pentru orice clasă de interpretări, I_k, nevidă, demonstrându-se relația de mai sus.

În acest fel, se obține:

$$(p_i)A(p_i) \equiv \&_k((\&_i e_{ik}p_{ik})\supset A(p_i))I_k.$$

Revenind la exemplul de mai sus, formula „(p,q)(p⊃q)" este dezvoltată astfel:

$$(T\&T)\supset(T\supset T))I_3\&((T\&T)\supset(T\supset\perp))I_2\&((T\&T)\supset(\perp\supset T))I_1\&((T\&T)\supset(\perp\supset\perp))I_0$$

Utilizând acest artificiu, putem selecta interpretările care satisfac condițiile de necesitate, ajungând la următoarea interpretare a constantei necesității:

$$NA(p_i) \equiv (p_i)(X(\&_i e_i p_i) \supset (\&_i e_i p_i \supset A(p_i))$$

Problema interpretării necesității astfel încât să fie evitate paradoxurile implicației stricte se reduce la determinarea condițiilor *X* şi la stabilirea naturii expresiilor „$\&_i e_i p_i$" Un răspuns la aceste probleme este propus de *semantica lumilor posibile*. Din perspectiva acesteia, expresiile „$\&_i e_i p_i$" sunt numite *lumi posibile*, *w*. Acestea sunt interpretate în limbajul natural prin conjuncții maximale de propoziții compatibile între ele; dacă s-ar adăuga alte propoziții la o asemenea conjuncție, s-ar ajunge la contradicție.

Lumile posibile sunt în relație biunivocă cu interpretările posibile ale unui sistem de variabile propoziționale. De exemplu, sistemului de două variabile, <p,q> îi corespund patru clase de lumi posibile: w_3 = p&q; w_2 = p&~q; w_1 = ~p&q; w_0 = ~p&~q, corespunzătoare celor patru interpretări pe mulțimea **V** a celor două variabile. Relativ la interpretările I_k, lumile corespunzătoare, w_k, sunt formule care au interpretarea T.

Interpretarea logică a necesității devine:

$NA(p_i) \equiv (w)((Xw \supset (w \supset A(p_i)))$, respectiv, *A* este necesară dacă şi numai dacă *A* are interpretarea T relativ la orice lume *w* care satisface condițiile *X*.

Pentru a determina condițiile *X*, semantica lumilor posibile definește *relația de accesibilitate*, H, între lumi. O lume, *w*, este accesibilă dintr-o altă lume, w_0, dacă şi numai dacă există transformări care permit trecerea de la lumea w_0 la *w*. Interpretarea necesității devine:

$NA(p_i)/w_0 \equiv (w)((Hww_0 \supset (w \supset A(p_i)))$, *A* este necesară relativ la lumea w_0 dacă şi numai dacă *A* are interpretarea T relativ la orice lume accesibilă relativ la w_0.

Prin introducerea relației de accesibilitate, se obține un concept *relativ* al necesității, respectiv, propoziții necesar adevărate relativ la o lume sunt contingente relativ la alte lumi. Utilizând definițiile celorlalte constante modale se obțin interpretările acestora relativ la mulțimea lumilor posibile:

$\sim NA(p_i)/w_0 \equiv (\exists w)((Hww_0 \& (w \& \sim A(p_i)))$, *A* este contingentă relativ la w_0 dacă şi numai dacă *A* are interpretarea $\perp$ pentru cel puțin o lume accesibilă față de w_0.

$MA(p_i)/w_0 \equiv (\exists w)((Hww_0 \& (w \& A(p_i)))$, *A* este posibilă relativ la w_0 dacă şi numai dacă *A* are interpretarea T pentru cel puțin o lume accesibilă din w_0.

$\sim MA(p_i)/w_0 \equiv (w)((Hww_0 \supset (w \supset \sim A(p_i)))$, *A* este imposibilă relativ la w_0 dacă şi numai dacă *A* are interpretarea $\perp$ pentru orice lume accesibilă din w_0.

Interpretarea constantelor modale depinde, astfel, de proprietățile relației de accesibilitate. După relația de accesibilitate avută în vedere, se obțin diferite soluții la problema interpretării logice a modalităților şi, totodată, deoarece validitatea depinde de modul în care sunt interpretate formulele, pentru fiecare relație de accesibilitate imaginabilă rezultă altă listă de formule valide ale Lm, adică, din perspectiva lumilor posibile, *există tot atâtea logici modale câte relații de accesibilitate.*

Pluralitatea logicilor modale nu poate fi acceptată, deoarece ar rezulta că există propoziții necesar adevărate care, în funcție de relația de accesibilitate, pot fi false. Acest paradox provine din aceea că termenul „lume posibilă" este inconsistent, iar semantica lumilor posibile nu poate servi ca

fundament pentru interpretarea constantelor modale, astfel încât, paradoxurile implicației stricte să fie evitate.

Două propoziții sunt posibil adevărate între ele dacă şi numai dacă sunt compatibile. Aşa-zisele „lumi posibile" nu sunt compatibile între ele, aşa încât ele nu sunt posibile împreună. De exemplu, dacă ne oprim la lumile care pot fi deosebite printr-un sistem de două variabile, oricare două asemenea lumi, cum ar fi „p&q" şi „p&~q", nu sunt compatibile (conjuncția lor este contradictorie); ele nu sunt posibile împreună. Urmează că, există o singură lume posibilă, şi anume, *lumea reală*, lumea care are loc. Celelalte „lumi" sunt doar imaginare sau contrafactuale, nicidecum posibile. Semantica lumilor posibile trebuie înlocuită cu *semantica lumii reale.*

2.3. *Semantica lumii reale*

În orice *stare* a lumii reale, o propoziție sau negația ei, dar nu ambele, este *adevărată.* Prin urmare, expresiile „$\&_i e_i p_i$" au fost greşit interpretate ca lumi diferite, ele descriu stări posibile, s_k, ale unei singure lumi, cea care se petrece. Dintre aceste stări, la un moment dat, are loc una singură. Nu pot avea loc mai multe, deoarece s-ar încălca principiul noncontradicției şi nu se poate să nu aibă loc niciuna, deoarece s-ar încălca principiul terțului exclus; există o funcție de la timp la stările posibile ale lumii reale. La un moment dat, unele stări au avut deja loc, acestea constituie *trecutul*, iar alte stări încă nu au avut loc, ele fiind variante posibile ale viitorului.

Dacă starea descrisă prin „$\&_i e_i p_i$" are loc la momentul t_0, atunci propozițiile $e_i p_i$ sunt adevărate la acel moment şi reciproc. După cum remarca încă Aristotel, dacă o propoziție este adevărată, atunci orice consecință a acesteia este adevărată *cu necesitate.* Prin urmare, dacă există o propoziție

care este adevărată la un moment dat, atunci toate subalternele ei sunt *cu necesitate adevărate* la acel moment. Obținem următoarea interpretare a necesității:

$NA(p_i)/t_0 \equiv (\exists s)((s<s_0)\supset(s\supset A(p_i))$, *A* este necesar adevărată la momentul t_0 dacă şi numai dacă este consecință a unei stări a lumii reale anterioare lui t_0.

Pe de altă parte:

$$(\exists s)((s<s_0)\supset(s\supset A(p_i)) \equiv (\exists s)(((s<s_0)\&s)\supset A(p_i))$$
$$(\exists s)(((s<s_0)\&s)\supset A(p_i)) \equiv (s)((s<s_0)\&s)\supset A(p_i)$$

de unde rezultă:

$NA(p_i)/t_0 \equiv (s)((s<s_0)\&s)\supset A(p_i)$

„$(s)((s<s_0)\&s)$" reprezintă toate stările care au avut loc până la momentul t_0, adică, reprezintă *trecutul* la momentul t_0, pe care îl notăm prin T_0.

$NA(p_i)/t_0 \equiv (T_0\supset A(p_i))$, *A* este necesară la momentul t_0 dacă şi numai dacă *A* este consecință a trecutului la momentul t_0.

Celelalte modalități primesc următoarea interpretare:

a) posibilitatea

$MA \equiv \sim N\sim A$

$MA/t_0 \equiv \sim(\exists s)(((s<s_0)\&s)\supset\sim A) \equiv (s)(((s<s_0)\&s)\&A) \equiv (s)((s<s_0)\&s)oA \equiv T_0oA$, *A* este posibilă la momentul t_0 dacă şi numai dacă *A* este compatibilă cu trecutul la momentul t_0.

b) contingența

$\sim NA/t_0 \equiv \sim(T_0\supset A) \equiv T_0o\sim A$, *A* este contingentă la momentul t_0 dacă şi numai dacă $\sim A$ este compatibilă cu trecutul la momentul t_0.

c) imposibilitatea

$\sim MA/t_0 \equiv \sim(T_0 oA) \equiv T_0 \supset \sim A$, *A* este imposibilă la momentul t_0 dacă şi numai dacă $\sim A$ este consecinţă a trecutului la momentul t_0.

Semantica lumii reale dezvoltă o interpretare a constantelor modale fără a apela la fantomaticele lumi posibile şi, totodată, evitând paradoxurile implicaţiei stricte. Consecinţele trecutului nu sunt toate tautologii, astfel încât, există propoziţii factuale necesar adevărate la un moment dat.

Valorile modale ale propoziţiilor se modifică în timp, astfel: propoziţii care, la un moment dat, sunt posibile sau contingente, pot deveni ulterior necesare sau imposibile, în schimb, propoziţiile necesare şi cele imposibile la un moment dat, îşi păstrează valoarea modală la orice moment ulterior.

Până acum, în 2010, nu a existat nici un corb alb. În acest caz, în acest moment, propoziţiile referitoare la corbi au următoarele valori modale:

A: Toţi corbii sunt negri – posibil
E: Nici un corb nu este negru – imposibil
I: Unii corbi sunt negri – necesar
O: Unii corbi nu sunt negri – contingent

Să presupunem că, la un moment ulterior, va apare un corb alb (în chip natural sau prin inginerie genetică). La acel moment, propoziţiile de mai sus îşi modifică valoarea modală astfel:

A: Toţi corbii sunt negri – imposibil
E: Nici un corb nu este negru – imposibil
I: Unii corbi sunt negri – necesar
O: Unii corbi nu sunt negri – necesar

Constatăm că, în vreme ce propozițiile *E* și *I* își păstrează valoarea modală în urma evenimentului apariției corbului alb, propozițiile *A* și *O* își schimbă valoarea modală, devenind prima imposibilă iar a doua necesară.

Să arătăm că o propoziție necesară la un moment dat, rămâne necesară la un moment ulterior:

$$Np/t_0 \supset Np/t_1,\ t_1>t_0$$
$$Np/t_0 \equiv T_0 \supset p$$

$T_1 \equiv T_0 \& T$, trecutul la t_1 înglobează trecutul la t_0.

$$(T_0 \supset p) \supset ((T_0 \& T) \supset p)$$
$$p=T:\ T$$
$$p=\bot:\ {\sim}T_0 \supset ({\sim}T_0 \vee {\sim}T) = T$$

q.e.d.

La fel se demonstrează că propozițiile imposibil adevărate rămân imposibile indiferent ce s-ar întâmpla.

Acest comportament al valorilor modale generează *săgeata timpului*. În vreme ce valoarea de adevăr a unei propoziții poate oscila în timp în ambele sensuri dinspre adevăr spre fals și invers, valoarea modală a propozițiilor se schimbă numai dinspre posibil-contingent înspre necesar-imposibil, nu și invers. De exemplu, propoziția „România este regat" și-a modificat valoarea de adevăr de mai multe ori în timp: fals în 1877; adevărat în 1900; fals în 2010, putând deveni din nou adevărată în viitor. De aceea, pornind de la valorile de adevăr nu se poate stabili un sens în evoluția lumii reale. În schimb, valorile modale ale propozițiilor indică un asemenea sens. De pildă, dacă la momentul t_0 o propoziție era posibilă, iar la momentul t_1 aceeași propoziție era necesară, înseamnă că momentul t_1 este *ulterior* momentului t_0.

S-ar putea întrevedea un moment viitor în care toate propozițiile să fie sau necesar sau imposibil adevărate. În acel moment, nici o schimbare nu ar mai fi posibilă, ci orice propoziție și-ar păstra valoarea de adevăr de-a pururi; lumea

reală sau universul ar înceta să se mai schimbe, ar interveni *moartea modală a universului*. Moartea termică a universului, prevăzută de termodinamică, nu este decât un caz particular al morții modale, care este o consecință a logicii şi a semanticii lumii reale.

Trecutul este necesar relativ la prezent, deoarece trecutul la un moment anterior este consecință a trecutului de la un moment posterior:

$$NT_0/T_1$$
$$NT_0/T_1 \equiv T_1 \supset T_0$$
$$T_1 \supset T_0,\ t_1 > t_0$$
q.e.d.

Din această pricină, trecutul nu poate fi schimbat, nu se poate călători în timp. Propozițiile adevărate despre evenimente din trecut sunt necesar adevărate; istoria este o ştiință, iar certitudinea în propozițiile istoriei poate fi justificată.

3. Logica modală

Metodele de decizie ale logicii propozițiilor sunt adaptate pentru decizia logică asupra formulelor care conțin constante modale, ținând seama de interpretările specifice ale acestora. De exemplu, decizia asupra formulei „Np", („*p* este necesar adevărat"), şi asupra formulei „Mp", („*p* este posibil), decurge în felul următor:

Interpretări	$\mathbf{I_0}$	$\mathbf{I_1}$	$\mathbf{I_2}$	$\mathbf{I_3}$	**Condiții**
T_0	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	
p	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	
Np	$\top$	$\top$		$\top$	$\neg I_2$
	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	I_2
Mp	$\perp$	$\perp$	$\perp$		$\neg I_3$
	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	I_3

T_0, trecutul la momentul t_0, are interpretarea $\top$ numai după momentul t_0, deoarece trecutul la un moment se realizează în totalitate după momentul respectiv. Interpretările pentru care $T_0 = \top$ se petrec în viitor, în vreme ce interpretările $T_0 = \bot$ indică trecutul la momentul t_0.

Formula „p" este necesară relativ la T_0 dacă nu există interpretări $<\top, \bot>$ ale sistemului $<T_0,p>$, respectiv, dacă după momentul t_0, „p" nu are interpretarea *fals*. Pe de altă parte, „p" este posibilă dacă admite interpretarea *adevărat* după t_0. Iată cum se calculează interpretarea unei formule compuse a Lm, $E = Np \supset Mp$:

Interpretări	I_0	I_1	I_2	I_3	**Condiții**
T_0	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	
p	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	
Np	$\top$	$\top$		$\top$	$\neg I_2$
	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	I_2
Mp	$\bot$	$\bot$	$\bot$		$\neg I_3$
	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	I_3
$Np \supset Mp$	$\bot$	$\bot$			$\neg I_2 \& \neg I_3$
	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$I_2 v I_3$

Formula *E* are interpretarea *adevărat* dacă există viitor la momentul t_0, respectiv, dacă t_0 nu reprezintă sfârşitul lumii. Prin urmare, în orice moment al lumii reale, cu excepția sfârşitului ei, dacă o propoziție este necesară, atunci ea este şi posibilă. Aşa cum am văzut, la sfârşitul lumii, orice propoziție este necesară sau imposibilă, cu alte cuvinte, orice propoziție factuală va fi sau necesară sau imposibilă (pe lângă tautologii, care sunt necesare şi contradicții, care rămân imposibile):

Interpretări	I_0	I_1
T_Ω	$\perp$	$\perp$
p	$\perp$	T
Np	T	T
N~p	T	T
Mp	$\perp$	$\perp$
M~p	$\perp$	$\perp$

Evoluția universului înseamnă transformarea propozițiilor factuale în necesare şi imposibile. Invers, la începutul lumii, nici o propoziție factuală nu era necesară sau imposibilă. La acea dată, numai *logica* era necesară, adică propozițiile necesar adevărate şi tautologiile coincideau. La începutul lumii, numai logica era întemeiată. Dimpotrivă, la sfârşitul lumii, relația între valorile logice şi cele modale ale propozițiilor va fi:

Tautologii	Factuale	Contradicții
Necesare	Imposibile	

Prin interpretarea temporală a modalităților în cadrul semanticii lumii reale, paradoxurile implicației stricte sunt înlăturate. Se constată cu uşurință că teza lui Aristotel, $(P|\text{-}Q)\supset(P\supset NQ)$, este tautologie, deoarece formula care o exprimă, $(p,q)(p\supset q)\supset(p\supset(T_0\supset q))$, este validă, în timp ce reciproca acesteia nu este validă, cu urmarea că identificarea propozițiilor necesar adevărate cu tautologiile este, astfel, respinsă.

PREDICATE

În vreme ce limbajul simbolic al propoziţiilor analizează expresiile lingvistice numai până la nivelul propoziţiilor simple, limbajul predicatelor duce analiza mai departe, punând în evidenţă sintaxa propoziţiilor simple, alcătuite din *nume* şi din functori care transformă unul sau mai multe nume în propoziţii, numiţi *predicate*. De aceea, sintaxa limbajului predicatelor conţine, pe lângă variabile propoziţionale, încă două categorii de variabile, corespunzătoare numelor şi predicatelor.

1. Sintaxa limbajului predicatelor

1.1. *Lista simbolurilor primitive*

1.1.1. Simboluri variabile

a) variabile propoziţionale, **Var(prop)**: p, q, r

b) variabile individuale, **Var(ind)**: x, y, z

c) variabile predicative, **Var(pred)**: F, G, H ...

1.1.2. Simboluri constante

a) operatori logici: ~, v

b) cuantificatorul existenţial: ∃

1.1.3. Simboluri auxiliare

a) paranteze închisă şi deschisă: (,)

1.2. *Reguli de bine formare*

a) **Var(prop)** ∈ **EBF**, de exemplu, „p", „q", „r" sunt expresii bine formate;

b) **Var(pred)(Var(ind), Var(ind), ..., Var(ind))** ∈ **EBF**, de pildă, expresiile „Fx", „Gy"; „Fxy" sunt bine formate;

1.3. *Reguli de transformare*

a) Dacă A∈**EBF** atunci ~A∈**EBF**, de exemplu, „~p", „~Fx", „~~Gxy" sunt expresii bine formate;

b) Dacă A,B∈**EBF** atunci AvB∈**EBF**, de pildă, „pvq", pvFx", ~GxvFxy" sunt bine formate;

c) Dacă A(...**Var(ind)**...)∈**EBF** atunci are loc (∃**Var(ind)**)A(...**Var(ind)**...)∈**EBF**, prin urmare, expresii precum: (∃x)Fx, (∃x)(FxvGy), (∃x)(∃y)(Fxv~Gy) sunt bine formate. Formula (∃**Var(ind)**)A(...**Var(ind)**...) se citeşte: „Există **Var(ind)** astfel încât A(...**Var(ind)**...)"

1.4. *Lista simbolurilor derivate*

a) conjuncția, implicația, echivalența se definesc la fel ca în limbajul propozițiilor

b) cuantificatorul universal:

$$(\mathbf{Var(ind)})A(\ldots\mathbf{Var(ind)}\ldots) =_{df} \sim(\exists\mathbf{Var(ind)})\sim A(\ldots\mathbf{Var(ind)}\ldots)$$

De exemplu, expresiile „(x)Fx", „(x)(y)Gxy", „(x)(FxvGy)" sunt formule ale limbajului predicatelor. Formula cuantificată universal „(**Var(ind)**)A(...**Var(ind)**...)" se citeşte „Pentru orice **Var(ind)** are loc A(...**Var(ind)**...)"

1.5. *Paradoxuri sintactice*

În multe situații, dacă nu se ține seama de sintaxa expresiilor limbajului predicatelor, se cade în paradox.

a) paradoxuri provenite din confuzia între predicate *absolute* şi *relative*. Predicatele absolute sau monare se aplică unui singur argument, în vreme ce predicatele relative sau *relațiile* se aplică mai multor argumente. Despre un om care are mai puțin de 30 de ani spunem că este tânăr. De asemenea, cineva care are peste 50 de ani de bună seamă că

nu este tânăr. Care este vârsta până la care cineva este considerat, pe bună dreptate, ca fiind tânăr? Unii cercetători consideră că nu se poate stabili o asemenea vârstă, iar predicatul „*x* este tânăr" face parte dintr-o categorie mai vastă de *predicate fuzzy* care divid domeniul constantelor individuale în trei clase, nu în două, adăugându-se clasa indivizilor despre care nu se poate preciza dacă satisfac sau nu predicatul respectiv. În acest fel, fie principiul bivalenței, fie principiul terțului exclus nu are caracter universal. De fapt, în cazul unor astfel de predicate, fie este vorba de necunoaştere, când *nu ştim* dacă un obiect satisface predicatul sau nu, fie este vorba de încălcarea regulilor sintaxei. Din prima categorie fac parte numeroase aşa-zise paradoxuri, cum ar fi cele cu privire la viitor. Fie predicatul „*x* va fi preşedintele României în 2020". Din faptul că acum, în 2010, nu putem şti cine va satisface predicatul respectiv, nu rezultă că o asemenea persoană nu există sau nu este determinată. Dacă revenim la exemplul precedent, predicatul „*x* este tânăr" provine dintr-un predicat relativ, „*x* are mai puțini ani decât *y*" Dintr-un predicat relativ se obține un predicat absolut înlocuind una dintre variabile printr-o constantă. În cazul dat, constanta este aleasă convențional, să spunem, 35 de ani, când, predicatul absolut are următoarea definiție: „*x* este tânăr" $=_{df}$ „*x* are mai puțin de 35 de ani" Introducând o asemenea definiție, impusă de sintaxa diferită a predicatelor absolute şi a celor relative, decizia asupra predicatului în cauză poate fi realizată în fiecare caz. Predicatele fuzzy sunt doar urmarea încălcării sintaxei limbajului predicatelor; nu poate fi construită nici o logică fuzzy, iar principiile logicii îşi dovedesc încă o dată universalitatea.

b) paradoxuri provenite din confuzia între nume şi notații. Unele predicate au ca argumente nume, altele admit ca argumente notații. Numele au ca denotat obiecte, în vreme ce notațiile au rolul de a fixa expresii. Dacă dorim să ne

referim la expresii, putem adopta două strategii, fie introducem noi expresii prin care expresiile date sunt *notate*, fie expresiile sunt puse între ghilimele. De exemplu, dacă dorim să ne referim la o expresie a limbajului predicatelor o putem nota, E $=_{not}$ „Fx", fie o plasăm între ghilimele, „Fx" Următoarele sunt echivalente: „*E* este un predicat" ≡ „„Fx" este un predicat" Deoarece notațiile sunt introduse pornind de la punerea expresiei între ghilimele, sintaxa cere ca notația să poată fi întotdeauna substituită prin expresia notată între ghilimele și reciproc. În vreme ce numele au toate aceeași sintaxă, expresiile între ghilimele au sintaxe diferite; de aceea, predicatele care se aplică numelor nu pot fi confundate cu predicatele aplicate notațiilor. La fel, predicatele al căror argument are o anumită sintaxă, nu pot fi extinse asupra unor expresii cu o altă sintaxă, deoarece nu s-ar conserva bine formarea. De exemplu, predicatul „*x* este roșu" se aplică numelor, o expresie precum „„Roșu(x)" este roșu" nu este propoziție. Predicatele care se aplică predicatelor nu pot fi aplicate propozițiilor etc. De exemplu, predicatul de propoziții „G„p"" nu poate fi aplicat unui nume sau unui predicat, expresiile „G„x"" sau „G„Fx"" nu sunt bine formate.

Diversele forme ale paradoxului *Mincinosul* sunt construite fără a ține seama de sintaxa argumentelor predicatelor. Potrivit principiului bivalenței, o propoziție nu poate fi decât adevărată sau falsă. Fie propoziția *p* care afirmă despre sine că este falsă: p = „Propoziția „p" este falsă", respectiv, p = Fals(„p"). Care este valoarea ei de adevăr? Dacă presupunem că *p* este adevărată, atunci aceasta trebuie să fie falsă, ajungând la contradicție:

Adevărat(„p") (presupunere)
Adevărat(„Fals(„p")")
Fals(„p")

Dacă admitem că p este falsă, atunci p este adevărată, căzându-se, iar, în contradicție:

Fals(„p") (presupunere)
Fals(„Fals(„p")")
Adevărat(„p")

Predicatul „Fals(„p")" se aplică numai propozițiilor. Dacă p = Fals(„p"), atunci, pentru ca „p" să fie propoziție este necesar ca argumentul predicatului „Fals" să fie propoziție, respectiv, este necesar ca „p" să fie propoziție, căzându-se în cerc vicios. Încălcarea sintaxei poate fi constatată, bunăoară, ținând seama că notația „p" trebuie să poată fi eliminată prin substituirea cu expresia notată între ghilimele; dacă se încearcă această operație se ajunge la o expresie nesaturată:

Fals(„Fals(„Fals...)).

2. Semantica limbajului predicatelor

2.1. *Interpretarea logică*

2.1.1. Interpretarea logică a variabilelor

Fiecare categorie de variabile este interpretată pe câte un domeniu de constante interpretative: variabilele propoziționale sunt interpretate pe domeniul valorilor de adevăr, $\mathbf{V} = \{\top, \bot\}$, variabilele individuale sunt interpretate pe domeniul *constantelor individuale*, $\mathbf{D} = \{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$, iar constantele predicative sunt interpretate pe domeniul *constantelor predicative*, $\mathbf{F} = \{f^{(n)}_1, \ldots, f^{(n)}_m, g^{(n)}_1, \ldots, g^{(k)}_n, \ldots\}$, respectându-se *aritatea*, (n), variabilei predicative respective.

Între cele trei domenii de constante interpretative există următoarea relație: constantele predicative sunt *funcții de adevăr* de constantele individuale, respectiv, sunt funcții definite pe $\mathbf{D}^n$ cu valori în **V**. Dacă avem în vedere un domeniu alcătuit din *n* constante individuale, $\mathbf{D} = \{a_1, a_2, a_n\}$, există 2^n constante predicative monare, 2^{nx2} contante binare, în general, 2^{nxm} constante *m*-are. De exemplu, dacă ne oprim la un domeniu alcătuit din două constante individuale, $\mathbf{D_2} = \{a_1, a_2\}$, tabelul constantelor predicative monare definite relativ la $\mathbf{D_2}$ este:

	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$
f_0	⊤	⊤
f_1	⊤	⊥
f_2	⊥	⊤
f_3	⊥	⊥

Se contată că există o constantă predicativă care are valoarea *fals* şi o constantă predicativă care are valoarea *adevărat* pentru orice constantă individuală. Celelalte două constante au valoarea adevărat doar pentru una dintre constantele individuale din **D**.Tabelul constantelor predicative binare, relative la $\mathbf{D_2}$ este următorul:

	$\mathbf{(a_1,a_1)}$	$\mathbf{(a_1,a_2)}$	$\mathbf{(a_2,a_1)}$	$\mathbf{(a_2,a_2)}$
$g^{(2)}{}_0$	⊥	⊥	⊥	⊥
$g^{(2)}{}_1$	⊥	⊥	⊥	⊤
$g^{(2)}{}_2$	⊥	⊥	⊤	⊥
...				
$g^{(2)}{}_{15}$	⊤	⊤	⊤	⊤

2.1.2. Interpretarea logică a constantelor

Constantele limbajului predicatelor sunt interpretate logic prin funcții de adevăr definite pe clasa valorilor de

adevăr, în acelaşi mod ca şi constantele corespunzătoare ale limbajului propoziţiilor.

2.1.3. Interpretarea logică a cuantificatorilor

Dacă **D** = $\{a_1, \ldots, a_n\}$ este domeniul constantelor individuale, cuantificatorul existenţial primeşte următoarea interpretare logică:

$$(\exists x)A(\ldots x\ldots) = A(\ldots a_1\ldots) \vee A(\ldots a_2\ldots) \vee \quad \vee A(\ldots a_n\ldots)$$

De exemplu, formula „$(\exists x)(Fx \supset Gy)$" are interpretarea:

$$(Fa_1 \supset Gy) \vee (Fa_2 \supset Gy) \vee \quad \vee (Fa_n \supset Gy)$$

Interpretarea cuantificatorului universal se obţine utilizând definiţia acestuia:

$$(x)A(\ldots x\ldots) = \sim(\exists x)\sim A(\ldots x\ldots) = \sim(\sim A(\ldots a_1\ldots) \vee \sim A(\ldots a_2\ldots) \vee \quad \vee \sim A(\ldots a_n\ldots))$$
$$(x)A(\ldots x\ldots) = A(\ldots a_1\ldots) \,\&\, A(\ldots a_2\ldots) \,\&\, \quad \&\, A(\ldots a_n\ldots)$$

Bunăoară, prin interpretarea logică a formulei „$(x)(Fx \supset Gy)$" se ajunge la:

$$(Fa_1 \supset Gy) \,\&\, (Fa_2 \supset Gy) \,\&\, \quad \&\, (Fa_n \supset Gy)$$

La rândul ei, formula „$(\exists x)(y)(Fx \supset Gy)$" are interpretarea:

$$((Fa_1 \supset Ga_1) \,\&\, (Fa_2 \supset Ga_1) \,\&\, \quad \&\, (Fa_n \supset Ga_1)) \vee \quad \vee ((Fa_1 \supset Ga_n) \,\&\, (Fa_2 \supset Ga_n) \,\&\, \quad \&\, (Fa_n \supset Ga_n))$$

În urma interpretării formulelor cuantificate, variabilele legate prin cuantificatori sunt eliminate, fiind substituite prin

constante. În exemplul de mai sus, variabilele individuale au lăsat locul constantelor individuale, rămânând numai variabilele predicative.

2.1.4. Interpretarea logică a formulelor

Formulele limbajului predicatelor sunt interpretate logic pe un domeniu **D** astfel:

a) interpretarea cuantificatorilor;
b) interpretarea variabilelor individuale şi predicative;
c) fiecare subexpresie simplă obținută prin eliminarea cuantificatorilor şi a variabilelor individuale şi predicative este interpretată prin valori de adevăr conform tabelelor care definesc constantele predicative;
d) interpretarea constantelor prin funcții de adevăr.

De exemplu, să interpretăm logic expresia „Fx v ~Fx" pe $\mathbf{D_2}$:

a) prin interpretarea variabilei individuale se obțin expresiile:

$$Fa_1 \text{ v } \sim Fa_1;\ Fa_2 \text{ v } \sim Fa_2$$

b) interpretarea variabilei predicative:

$$f_0a_1 \text{ v } \sim f_0a_1;\ f_0a_2 \text{ v } \sim f_0a_2$$
$$f_1a_1 \text{ v } \sim f_1a_1;\ f_1a_2 \text{ v } \sim f_1a_2$$
$$f_2a_1 \text{ v } \sim f_2a_1;\ f_2a_2 \text{ v } \sim f_2a_2$$
$$f_3a_1 \text{ v } \sim f_3a_1;\ f_3a_2 \text{ v } \sim f_3a_2$$

c) expresiile obținute sunt interpretate prin valori de adevăr:

⊥v~⊥; ⊥v~⊥
⊥v~⊥; Tv~T
Tv~T; ⊥v~⊥
Tv~T; Tv~T

d) constantele sunt interpretate prin funcțiile de adevăr corespunzătoare, obținându-se, pentru fiecare expresie, numai interpretarea *adevărat*.

Se deosebesc diferite trepte de interpretare. Bunăoară, o formulă „Fx" poate fi interpretată *parțial*, „Fa" – când este interpretată numai variabila individuală; „fx" – când interpretarea afectează doar variabila predicativă, sau *complet*, când toate simbolurile din cadrul formulei sunt interpretate prin constante interpretative. Mai trebuie deosebită interpretarea *ultimă* când formulele sunt interpretate prin secvențe de valori de adevăr. Formula „Fx" este interpretată mai întâi prin expresia „fa" care, la rândul ei, primește interpretarea <⊥,T>.

Interpretarea logică trebuie să respecte *sintaxa* expresiilor interpretate; de pildă, variabilele individuale nu pot fi interpretate prin constante predicative, la fel cum variabilele predicative nu acceptă ca interpretare constante individuale. De exemplu, „Ff", unde „f" este o constantă predicativă, nu este o interpretare corectă a formulei „Fx", deoarece încalcă sintaxa. Sintaxa constantelor predicative conține variabile individuale, altfel ar fi imposibil să le distingem de constantele individuale. De aceea, în cazul de mai sus, dacă variabila individuală este interpretată printr-o constantă predicativă, nu este eliminată: „Ffx", transformând predicatul monar „Fx" într-un predicat de predicate.

Încălcarea constrângerilor sintaxei în interpretarea logică a formulelor limbajului predicatelor conduce la paradoxuri, cum este „impredicabil", imaginat de Russell. Un

predicat este satisfăcut de el însuşi sau nu. De exemplu, predicatul „roşu(x)" nu este roşu, pe când „predicat(Fx)" este un predicat. Despre predicatele care se aplică lor însele spunem că sunt *predicabile*, iar celelalte se numesc *impredicabile*. Apare problema dacă predicatul „Impredicabil" este predicabil sau nu. Dacă presupunem că este predicabil, atunci se aplică lui însuşi, adică este impredicabil; dacă presupunem că este impredicabil, atunci nu se aplică sieşi, deci este predicabil.

Notăm predicatul „predicabil" prin „Pred" şi „impredicabil" prin „Imp" Un predicat este impredicabil dacă nu se aplică sieşi:

$$Imp(„Fx") \equiv \sim F(„Fx") \text{ şi}$$
$$\sim Pred(„Fx") \equiv Imp(„Fx")$$

Dacă *Imp* este predicabil, atunci trebuie să fie impredicabil:

Pred(„Imp") (presupunere)
~Imp(„Imp")
~~Imp(„Imp")
Imp(„Imp")

Iar dacă *Imp* este impredicabil, atunci acesta trebuie să fie impredicabil:

Imp(„Imp") (presupunere)
~Imp(„Imp")
Pred(„Imp")

Paradoxul *impredicabil* afectează limbajul predicatelor, arătând că formulele sale admit interpretări cărora nu li poate atribui o valoare determinată de adevăr, contrar condiției de bine formare.

La o analiză mai riguroasă, rezultă că paradoxul amintit este urmarea încălcării sintaxei limbajului predicatelor. Predicatele „predicabil" şi „impredicabil" sunt predicate de predicate, sintaxa lor este „Pred(„Fx")", respectiv, „Imp(„Fx")" Cele două *nu sunt predicate de predicate de predicate*, prin urmare, este o eroare sintactică să aplicăm aceste predicate unul altuia, întrebarea dacă *Imp* este predicabil sau impredicabil nu este corect pusă, deoarece presupune o încălcare a regulilor sintaxei.

Pentru a vedea dacă *Imp* este predicabil, ar trebui ca argumentul predicatului *Pred*, respecitv, „Fx", să fie substituit prin predicatul *Imp*, ajungându-se, respectând sintaxa acestuia din urmă, la:

Pred(„Fx")

Pred(„Imp(„Gy")), care nu este o expresie bine formată a limbajului predicatelor deoarece contravine definiției predicatului „predicabil" ca predicat de predicate.

La fel se întâmplă când vrem să stabilim dacă *Imp* este impredicabil:

Imp(„Fx")
Imp(„Imp(„Gy"))

Prin urmare, paradoxul *impredicabil* nu afectează limbajul predicatelor, fiind construit prin încălcarea sintaxei acestui limbaj, ci doar atrage atenția asupra importanței constrângerilor sintactice.

2.2. *Interpretarea naturală*

2.2.1. Interpretarea variabilelor în limbajul natural

Variabilele individuale sunt interpretate prin *nume*. De exemplu, variabila *x* din formula „Fx" admite interpretări

precum „John este *F*", iar variabilele *x* şi *y* din formula „Fxy" au ca interpretare „John este în relaţia *R* cu James" Variabilele predicative sunt interpretate prin predicate. Bunăoară, o interpretare naturală pentru „Fx" este „Socrate este atenian", unde variabila individuală a fost interpretată prin numele „Socrate" iar variabila predicativă, prin predicatul „*x* este atenian" Variabilele propoziţionale sunt interpretate prin propoziţii simple, la fel cu limbajul propoziţiilor.

2.2.2. Interpretarea cuantificatorilor în limbajul natural

Cuantificatorul existenţial este interpretat prin expresii precum „există", „unii", „o parte" etc., iar cuantificatorul universal admite ca interpretare „orice", „oricare", „toţi" etc. Formula „(∃x)(Fx&Gx)" admite interpretarea „Există obiecte care sunt atât *F* cât şi *G*", iar formula „(x)(Fx⊃Gx)" are ca interpretare: „Orice obiect care este *F* este *G*"

2.2.3. Interpretarea constantelor în limbajul natural

Constantele limbajului predicatelor admit drept interpretare în limbajul natural aceleaşi expresii ca şi constantele corespunzătoare din limbajul propoziţiilor.

2.3. *Simbolizare şi formalizare*

2.3.1. Simbolizarea în limbajul predicatelor

Simbolizarea în limbajul predicatelor se desfăşoară după aceleaşi reguli ca şi în limbajul propoziţiilor, la care se adaugă reguli pentru simbolurile nou introduse.

a) Numele sunt simbolizate prin variabile individuale;

b) Predicatele sunt simbolizate prin variabile predicative;

c) Cuantificatorii sunt simbolizați prin simbolurile cuantificatorilor.

De exemplu, expresii precum „România", „Everest", „Eminescu" sunt simbolizate prin variabile precum „x", „y" etc. La rândul lor, expresiile „este poet", „are 25 de ani", „este roşu", „are 2 m lungime" sunt simbolizate prin variabile predicative monare, „Fx" Alte expresii, „... este mai mare decât...", „... este mai bogat decât...", „... este fratele lui..." au ca simboluri variabile predicative binare, „Fxy" etc. Expresii precum „oricare", „orice", „toți" sunt simbolizate prin cuantificatorul universal, iar „unii", „există", „o parte" – prin cuantificatorul existențial.

2.3.2. Formalizarea în limbajul predicatelor

a) Formalizarea propozițiilor simple. Propozițiile simple sunt alcătuite din *n* nume şi un predicat *n*-ar: $nume_1+nume_2+...+nume_n+predicat^{(n)}$. Numele sunt simbolizate prin variabile individuale, iar predicatul, printr-o variabilă predicativă n-ară. Prin convenție, variabila predicativă este plasată înaintea variabilelor individuale, a căror ordine trebuie să corespundă cu ordinea numelor pe care le simbolizează. De exemplu, propoziția „România este republică" este formalizată prin „Fx", unde „x" este simbolul numelui „România", iar „F" este simbolul predicatului „... este republică" Formalizând propoziția „România este la nord de Bulgaria" se ajunge la „Fxy"

b) Formalizarea propozițiilor compuse. Propozițiile compuse pot conține un număr finit sau infinit de propoziții simple. În primul caz, propozițiile compuse conțin un număr finit de propoziții simple şi functori propoziționali. Formalizarea lor decurge astfel:

i) formalizarea propozițiilor simple, utilizând pentru expresii identice simboluri identice şi pentru expresii diferite simboluri diferite;

ii) simbolizarea functorilor propoziționali;

iii) construirea formulei corespunzătoare propoziției date indicând, cu ajutorul simbolurilor auxiliare, domeniul şi ordinea operatorilor.

De exemplu, să formalizăm propoziția „România este republică şi se află la nord de Bulgaria" Propozițiile componente sunt: „România este republică" = Fx; „România se află la nord de Bulgaria" = Gxy. Propoziția dată conține un singur functor propozițional, cel al conjuncției, aşa încât se obține formula „Fx&Gxy"

Unele propoziții compuse care conțin infinit de multe propoziții simple pot fi exprimate în limbajul natural prin mijloace finite, cu ajutorul cuantificatorilor. De exemplu, propoziția compusă: „Dacă Socrate este om, atunci Socrate este rațional şi dacă Platon este om atunci Platon este rațional şi dacă Aristotel este om, atunci Aristotel este rațional şi ", care se extinde asupra tuturor numelor din limbajul natural, este exprimată finit utilizând cuantificatorul universal: „Toți oamenii sunt raționali" În limbajul predicatelor, termenii „oamenii" şi „raționali" sunt simbolizate prin variabile predicative, relația presupusă între ele prin propoziția dată este simbolizată cu ajutorul implicației materiale, iar cuantificatorul este simbolizat prin simbolul cuantificatorului universal, obținându-se formula: „(x)(Fx⊃Gx)" În această expresie, functorul implicației nu leagă două variabile propoziționale, ci două variabile predicative, dând naştere unui *predicat complex*.

Propozițiile cuantificate particular sunt formalizate utilizând cuantificatorul existențial. Formula corespunzătoare pentru propoziția „Unii oameni sunt raționali" este

$(\exists x)(Fx\&Gx)$. Propozițiile silogistice sunt formalizate în limbajul predicatelor astfel:

Notație	Forma	Categoria	Formula
A	„Toți *S* sunt *P*"	Universal-afirmativă	$(x)(Sx\supset Px)$
E	„Nici un *S* nu este *P*"	Universal-negativă	$(x)(Sx\supset\sim Px)$
I	„Unii *S* sunt *P*"	Particular-afirmativă	$(\exists x)(Sx\&Px)$
O	„Unii *S* nu sunt *P*"	Particular-negativă	$(\exists x)(Sx\&\sim Px)$

Pe lângă propozițiile complexe care conțin cuantificatori universali şi existențiali, există propoziții cuantificate numeric, cum sunt: „Doi copii se joacă în fața casei", „Cel puțin o sută de deputați nu au votat legea", „Între 10 şi 20 de elevi au fost în excursie" etc. Limbajul predicatelor nu conține mijloace pentru a formaliza asemenea propoziții, limitându-se la cuantificatorul universal şi cel existențial. De aceea, se impune completarea listei simbolurilor limbajului predicatelor prin adăugarea cuantificatorilor numerici. De fapt, cei doi cuantificatori sunt cazuri particulare de cuantificatori numerici. Cuantificatorul universal reprezintă numărul maxim de constante individuale conținute de un domeniu, iar cuantificatorul existențial este identic cu cuantificatorul „cel puțin unul" De exemplu, propoziția „Cinci studenți au promovat examenul" poate fi formalizată astfel: $(5x)(Fx\&Gx)$, unde Fx = „*x* este student"; Gx = „*x* a promovat examenul"

Interpretarea logică a cuantificatorilor numerici este o disjuncție de conjuncții în care un număr de constante individuale precizat prin cuantificator satisfac predicatul, iar celelalte constante nu îl satisfac. Iată interpretarea logică a

formulei „(2x)Fx" pe un domeniu care conține trei constante individuale:

$$(2x)Fx \equiv (Fa_1 \& Fa_2 \& \sim Fa_3) \vee (Fa_1 \& \sim Fa_2 \& Fa_3) \vee (\sim Fa_1 \& Fa_2 \& Fa_3)$$

Se constată cu uşurință că, pe acelaşi domeniu, alcătuit din trei elemente, formulele „(x)Fx" şi (3x)Fx" au aceeaşi interpretare, iar interpretarea pentru „(∃x)Fx" este aceeaşi cu „(>1x)Fx", (cel puțin un *x* este *F*):

$$(>1x)Fx \equiv (Fa_1 \& Fa_2 \& Fa_3) \vee (Fa_1 \& Fa_2 \& \sim Fa_3) \vee (Fa_1 \& \sim Fa_2 \& Fa_3) \vee (\sim Fa_1 \& Fa_2 \& Fa_3) \vee (Fa_1 \& \sim Fa_2 \& \sim Fa_3) \vee (\sim Fa_1 \& Fa_2 \& \sim Fa_3) \vee (\sim Fa_1 \& \sim Fa_2 \& Fa_3) \equiv \sim(\sim Fa_1 \& \sim Fa_2 \& \sim Fa_3) \equiv Fa_1 \vee Fa_2 \vee Fa_3 \equiv (\exists x)Fx$$

3. Logica predicatelor

3.1. *Valorizarea formulelor limbajului predicatelor*

Formulele logicii predicatelor sunt interpretate logic pe diferite domenii de constante individuale. Dacă orice interpretare a unei formule pe un asemenea domeniu, *D*, este „adevărat", atunci formula este *validă* relativ la domeniul de interpretare *D*. În cazul în care orice interpretare pe domeniul *D* este *fals,* atunci formula este *irealizabilă* relativ la *D*, iar dacă unele interpretări sunt *adevărat* iar altele sunt *fals*, atunci formula este *realizabilă* în raport cu domeniul de interpretare.

De exemplu, să calculăm interpretările formulei E = „Fx v Gx" pe un domeniu alcătuit din două constante individuale, D = {a, b}. Constantele predicative au următoarele interpretări:

	a	b
f_0	⊥	⊥
f_1	⊥	T
f_2	T	⊥
f_3	T	T

Interpretările formulei date sunt următoarele:

Fx	Gx	FavGa	FbvGb
f_0	f_0	⊥	⊥
f_0	f_1	⊥	T
f_0	f_2	T	⊥
f_0	f_3	T	T
f_1	f_0	⊥	T
f_1	f_1	⊥	T
f_1	f_2	T	T
f_1	f_3	T	T
f_2	f_0	T	⊥
f_2	f_1	T	T
f_2	f_2	T	⊥
f_2	f_3	T	T
f_3	f_0	T	T
f_3	f_1	T	T
f_3	f_2	T	T
f_3	f_3	T	T

Formula dată este *realizabilă* pe domeniul *D*, deoarece admite atât interpretarea *adevărat* cât şi interpretarea *fals*.

Există situații în care, formule valide pe un domeniu nu sunt valide pe un alt domeniu. De exemplu, fie formula „Fx⊃(x)Fx" Această formulă este validă pentru domeniul D_1 = {a}, deoarece Fa⊃Fa este validă. Aceeaşi formulă este nevalidă pe domeniul D_2 = {a,b}. Interpretările parțiale sunt:

$Fa \supset (Fa \& Fb)$
$Fb \supset (Fa \& Fb)$

Dacă F = f_1, atunci formula dată are interpretarea *fals*: $f_1b \supset (f_1a \& f_1b) = T \supset (\bot \& T) = \bot$, prin urmare, nu este o formulă validă pe D_2. Pe de altă parte, există formule valide pentru orice domeniu, cum ar fi „Fx v ~Fx". Pe lângă valorile logice relative la un domeniu, trebuie definite valori logice *universale* ale formulelor din limbajul predicatelor:

a) o formulă validă pe orice domeniu de constante individuale, se numeşte *universal validă*;

b) o formulă irealizabilă pe orice domeniu de constante individuale se numeşte *universal irealizabilă*;

c) celelalte formule sunt realizabile.

3.2. *Metode de decizie*

Logica predicatelor constă din ansamblul formulelor *universal valide*. De bună seamă că nu se poate decide asupra unei formule pentru fiecare dintre domeniile posibile. Există, însă, pentru fiecare formulă, un domeniu de rang minim astfel încât, dacă formula este validă pentru acel domeniu, atunci este universal validă. Rangul domeniului minim trebuie să fie astfel încât să asigure varietatea maximă de interpretări ale formulei. În exemplul de mai sus, domeniul D_1 conduce doar la două interpretări diferite: $T \supset T$ şi $\bot \supset \bot$, în vreme ce domeniul D_2 generează 3 interpretări: $T \supset T$; $T \supset \bot$; $\bot \supset \bot$. Oricât am extinde domeniul de interpretare, nu s-ar obţine mai multe interpretări ultime. În general, dacă o formulă conţine *n* variabile individuale, domeniul minim trebuie să conţină 2^n elemente pentru asigurarea varietăţii. De aici rezultă:

Dacă o formulă care conține n variabile individuale este validă pe un domeniu de rangul 2^n , atunci este universal validă.

Decizia în logica predicatelor presupune calcule laborioase şi redundante. De aceea, s-au imaginat diferite metode simplificate de decizie. Deoarece constantele predicative sunt funcții de adevăr de constantele individuale, putem decide asupra unei formule E a logicii predicatelor reducând-o la o formulă a logicii propozițiilor:

a) se calculează domeniul de decizie corespunzător formulei E;

b) formula E este interpretată parțial eliminând cuantificatorii şi variabilele individuale;

c) subexpresiile minime din interpretările parțiale ale expresiei E, (care nu conțin functori propoziționali), sunt substituite prin variabile propoziționale, obținându-se o mulțime de formule în limbajul propozițiilor, E1;

d) se decide asupra formulelor din *E1*; dacă toate acestea sunt valide, atunci E este universal validă; dacă toate formulele din *E1* sunt irealizabile, atunci E este universal irealizabilă; în alte situații E este realizabilă.

De exemplu, să decidem asupra formulei „(x)Fx⊃Fx":

a) domeniul de decizie este D_2;

b) eliminarea cuantificatorului: (Fa&Fb)⊃Fx;

c) eliminarea variabilei individuale: (Fa&Fb)⊃Fa; (Fa&Fb)⊃Fb;

d) substituirea prin variabile propoziționale: (p&q)⊃p; (p&q)⊃q;

e) toate formulele obținute sunt valide; formula dată este universal validă.

Să decidem acum, asupra formulei „(x)(Fxy⊃Gy)"

a) domeniul de decizie este D_4;

b) $\&_i(Fa_ia_y \supset Gy)$;

c) $\&_i(Fa_ia_1 \supset Ga_1)$; $\&_i(Fa_ia_2 \supset Ga_2)$; $\&_i(Fa_ia_3 \supset Ga_3)$; $\&_i(Fa_ia_4 \supset Ga_4)$;

d) $\&_i(p_i \supset q_1)$; $\&_i(p_i \supset q_2)$; $\&_i(p_i \supset q_3)$; $\&_i(p_i \supset q_4)$;

e) expresia dată este realizabilă.

Decizia în logica predicatelor poate fi simplificată fără a o limita la un domeniu determinat. Se constată că un element oarecare al domeniului constantelor individuale divide câmpul constantelor predicative în două clase, după cum rezultatul interpretării este adevărat sau fals. De exemplu, în cazul domeniului D_2, constanta individuală a_1 divide câmpul predicatelor în $\{f_0, f_1\}$, pentru care se obține interpretarea *adevărat*, şi $\{f_2, f_3\}$, care generează interpretarea *fals*. În general, pentru un domeniu oarecare, constanta a_k divide câmpul predicatelor definibile peste acel domeniu în clasele C_0 şi C_1. Două constante individuale divid câmpul predicatelor în patru clase şi, în general, un sistem de n constante individuale conduc la 2^n clase de constante predicative. Pentru a decide este suficient ca variabilele predicative să fie interpretate printr-un singur element din fiecare clasă de predicate, evitându-se redundanța.

De pildă, să decidem asupra formulei „Fx⊃(∃x)Fx" Fie a un element oarecare al domeniului de decizie. Se obține formula parțial interpretată:

$$Fa \supset (\ldots v Fav \ldots)$$

Variabila predicativă este interpretată pe rând cu câte un element din C_0 şi din C_1:

$$C_0a \supset (\ldots vC_0av\ldots) = \bot \supset (\ldots v \bot v\ldots) = T$$

$$C_1a \supset (\ldots vC_1av\ldots) = T \supset (\ldots vTv\ldots) = T \supset T = T$$

Formula dată este universal validă. Să decidem şi asupra formulei „Fx⊃(x)Fx":

$$Fa \supset (\ldots \& Fa \& \ldots)$$
$$C_0a \supset (\ldots \& C_0a \& \ldots) = \bot \supset (\ldots \& \bot \& \ldots) = \bot \supset \bot = \top$$
$$C_1a \supset (\ldots \& C_1a \& \ldots) = \top \supset (\ldots \& \top \& \ldots)$$

⊤ (când consecventul nu conține *fals*, de pildă, pentru un domeniu care are un singur element)

⊥ (când consecventul conține *fals*, bunăoară, pentru un domeniu cu cel puțin două elemente)

Formula dată este validă pe anumite domenii şi nevalidă pe altele; prin urmare, nu este universal validă.

Matricele decizionale pot fi simplificate ținând seama că, în cazul unei formule simple, „Fx", câmpul constantelor predicative se împarte în două clase după cum, prin completare cu o constantă individuală, se obține *adevărat* sau *fals*. Aceste clase se modifică în funcție de constanta individuală. Fie I_0 şi I_1 cele două clase:

	$\mathbf{I_1}$	$\mathbf{I_0}$	**Condiții**
Fx	⊤	⊥	$I_0 \cup I_1 \neq \varnothing$

Formula dată este universal validă numai dacă $I_0 = \varnothing$, respectiv, dacă *F* este interpretat prin predicatul universal.

Utilizând asemenea matrice, putem decide şi asupra formulelor cuantificate potrivit tabelului următor:

	$\mathbf{I_1}$	$\mathbf{I_0}$	**Condiții**
Fx	⊤	⊥	$I_0 \cup I_1 \neq \varnothing$
(x)Fx	⊤		$\neg I_0$
	⊥	⊥	I_0
(∃x)Fx	⊤	⊤	I_1
		⊥	$\neg I_1$

Linia a treia conține condiția ca formula cuantificată universal să fie universal validă. Dacă variabila predicativă este interpretată printr-un predicat universal, atunci expresia obținută are interpretarea *adevărat* pentru orice domeniu. Linia a cincea conține condiția ca formula cuantificată existențial să fie universal validă, respectiv, clasa interpretărilor I_1 să nu fie vidă.

3.3. *Axiomatizarea logicii predicatelor*

Unul dintre cele mai cunoscute sisteme axiomatice ale logicii predicatelor este sistemul Hilbert-Ackermann. Constantele logice ale sistemului sunt negația, conjuncția, disjuncția, implicația materială, echivalența materială, la care se adaugă cuantificatorii universal și existențial. Sistemul Hilbert-Ackermann conține șase axiome; în primele patru apar numai variabile propoziționale, repetându-se axiomele sistemului logicii propozițiilor:

HAA1. (pvp)⊃p
HAA2. p⊃(pvp)
HAA3. (pvq)⊃(qvp)
HAA4. (p⊃q)⊃((rvp)⊃(rvq))
HAA5. (x)Fx⊃Fy
HAA6. Fy⊃(∃x)Fx

Regulile de detașare sunt:

HAD1. Regula substituției variabilelor propoziționale;

HAD2. Regula substituției variabilelor individuale libere;

HAD3. Regula de substituție a variabilelor predicative;

HAD4. Regula *modus ponens*;

HAD5. Regula de introducere a cuantificatorului universal, $A \supset B(\ldots x\ldots) \vdash A \supset (y)B(\ldots y\ldots)$, unde x este liberă în B şi nu apare în A, iar y nu apare în A sau B;

HAD6. Regula de introducere a cuantificatorului existenţial, $A(\ldots x\ldots) \supset B \vdash (\exists y)A(\ldots y\ldots) \supset B$, în aceleaşi condiţii;

HAD7. Regula de redenumire a variabilelor legate.

Cu ajutorul axiomelor şi a regulilor de detaşare sunt derivate alte reguli de detaşare şi teoreme.

4. Aplicaţii ale logicii predicatelor

4.1. *Determinarea valorii logice a propoziţiilor din limbajul natural*

Pentru a determina valoarea logică a unei propoziţii din limbajul natural, utilizând logica predicatelor, se procedează astfel:

a) propoziţia dată este formalizată în logica predicatelor;

b) asupra formulei obţinute se aplică o metodă de decizie din logica predicatelor;

c) în funcţie de rezultatul deciziei logice asupra formulei, se stabileşte valoarea logică a propoziţiei:

i) dacă formula este universal validă, atunci propoziţia este tautologie;

ii) dacă formula este universal irealizabilă, atunci propoziţia este o contradicţie;

iii) dacă formula este realizabilă, atunci propoziţia este factuală.

De exemplu, să decidem asupra propoziției: P = „Dacă România este o țară și se învecinează cu Rusia, atunci unele țări se învecinează cu România" Să formalizăm *P* în limbajul predicatelor:

„România este o țară" = Fx

„România se învecinează cu Rusia" = Gxy

„Unele țări se învecinează cu România" = (∃z)(Fz&Gzx)

Formula corespunzătoare propoziției *P* este: E = (Fx&Gxy)⊃(∃z)(Fz&Gzx).

Fie *a* un element oarecare al domeniului de interpretare. Notăm cu G* clasa elementelor *y* din *D* pentru care „Gxy" și cu G** clasa elementelor *z* care satisfac relația „Gzx" Se deosebesc opt interpretări posibile ale expresiilor simple din *E*:

Interpretări	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	**Condiții**
Fx/Fz	T	T	T	T	⊥	⊥	⊥	⊥	
G*y	T	T	⊥	⊥	T	T	⊥	⊥	
G**z	T	⊥	T	⊥	T	⊥	T	⊥	
Fx&Gay	T	T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	
Fy&Gzx	T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	
(∃z)(Fy&Gzx)	T	T	T	T	T	T	T	T	$I_7 \vee I_5$
		⊥		⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	$\neg I_7 \& \neg I_5$
E	T	T	T	T	T	T	T	T	$I_7 \vee I_5$
	-	⊥	-	T	T	T	T	T	$\neg I_7 \& \neg I_5$

Formula dată este doar realizabilă. Totuşi, avem de-a face cu o formulă universal validă dacă interpretarea I_6 nu are loc, respectiv, dacă, în cazul țărilor, G* este o parte a clasei G**. În acest caz, în interiorul clasei țărilor, codomeniul relației de învecinare trebuie să fie inclus în domeniul acelei relații. Condiția pentru ca *E* să fie universal validă este:

(y)((Fx&Fy)⊃(Gxy⊃Gyx)), pentru orice țară, *y*, dacă *y* se învecinează cu o țară *x*, atunci *x* se învecinează cu *y*.

Sub această condiție, propoziția asupra căreia s-a decis este tautologie sau, propoziția respectivă este adevărată în orice stare a lumii în care condiția amintită are loc.

Să decidem acum, asupra propoziției „Orice triunghi echilateral are trei laturi" Formula corespunzătoare acestei propoziții este: E = (x)((Fx&Gx)⊃Hx). Rezultatul deciziei este:

Int.	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	**Condiții**
Fx	T	T	T	T	⊥	⊥	⊥	⊥	
Gx	T	T	⊥	⊥	T	T	⊥	⊥	
Hx	T	⊥	T	⊥	T	⊥	T	⊥	
Fx&Gx	T	T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	
(Fx&Gx)⊃Hx	T	⊥	T	T	T	T	T	T	
(x)((Fx&Gx)⊃Hx)	T		T	T	T	T	T	T	$\neg I_6$
	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	I_6

Formula *E* este realizabilă, în ciuda faptului că propoziția dată este tautologie. Constatăm că şi în logica predicatelor, la fel cu logica propozițiilor, principiul corespondenței între interpretarea naturală şi cea logică a formulelor este încălcat. Motivul erorii de mai sus este că, în stabilirea interpretărilor posibile ale predicatelor care alcătuiesc formula, nu s-a ținut seama de relațiile dintre predicatele din propoziția dată. Deoarece triunghiurile au trei laturi prin definiție şi triunghiurile echilaterale sunt, la rândul lor, triunghiuri, interpretările predicatelor trebuie să țină seama de faptul că *Fx* este subordonat față de *Hx*, iar *Fx* este supraordonat față de *Gx*:

Int.	I_7	I_5	I_1	I_0	Condiții
Fx	T	T	⊥	⊥	
Gx	T	⊥	⊥	⊥	
Hx	T	T	T	⊥	
Fx&Gx	T	⊥	⊥	⊥	
(Fx&Gx)⊃Hx	T	T	T	T	
(x)((Fx&Gx)⊃Hx)	T	T	T	T	

S-a obținut rezultatul așteptat că formula este universal validă și propoziția dată este tautologie. Prin urmare, pentru a asigura respectarea principiului de corespondență, trebuie avute în vedere relațiile dintre predicatele formalizate în limbajul simbolic al predicatelor.

4.2. *Determinarea valorii logice a raționamentelor*

Dacă R = $\{P_1, \ldots, P_n\}$|-Q este un raționament în limbajul natural, pentru a determina corectitudinea lui, se procedează astfel:

a) se construiește propoziția asociată raționamentului: R1 = „Dacă (P_1 & & P_n), atunci *Q*";

b) *R1* este formalizată în limbajul predicatelor;

c) se decide asupra formulei obținute; raționamentul este corect în condițiile în care formula obținută este universal validă.

De exemplu, să decidem asupra raționamentului:

„Pământul se rotește în jurul Soarelui.
Toate planetele se rotesc în jurul Soarelui.
**Pământul este o planetă.

Prin formalizare, se ajunge la formula E = (Fxy&(z)(Gz⊃Fzy))⊃Gx. În urma deciziei, se obține rezultatul:

Int.	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	Cond.
Gz/Gx	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	
Fxy	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	
Fzy	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	
Gz⊃Fzy	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	
(z)(Gz⊃Fzy)	⊤		⊤		⊤	⊤	⊤	⊤	$\neg I_6 \& \neg I_4$
	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	$I_6 \vee I_4$
Fxy&(z)(Gz⊃Fzy)	⊤		⊥		⊤	⊤	⊥	⊥	$\neg I_6 \& \neg I_4$
	⊥	⊥		⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	$I_6 \vee I_4$
E	⊤		⊤		⊥	⊥	⊤	⊤	$\neg I_6 \& \neg I_4$
	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	$I_6 \vee I_4$

Raționamentul dat nu este corect deoarece formula corespunzătoare lui nu este universal validă. Totuşi, dacă interpretările I_3 şi I_2 nu au loc, atunci raționamentul devine corect, respectiv, condiția de corectitudine a raționamentului *R* este: (x)(Fxy⊃Gx), „Orice corp care se roteşte în jurul Soarelui este o planetă" Desigur că, această condiție nu are loc, aşa încât, raționamentul dat rămâne incorect, deşi concluzia sa este adevărată.

Una dintre aplicațiile importante ale logicii predicatelor este evaluarea silogisticii aristotelice, determinarea corectitudinii raționamentelor ale căror premise şi concluzie sunt alcătuite din aşa-numitele *propoziții de predicație* sau *propoziții silogistice*. De exemplu, silogismele din modul *Barbara* sunt dovedite corecte conform cu decizia:

Int.	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	Cond.
Mx	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	
Px	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	
Sx	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	
(x)(Mx⊃Px)	⊤	⊤			⊤	⊤	⊤	⊤	$\neg I_5 \& \neg I_4$
	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	$I_5 \vee I_4$
(x)(Sx⊃Mx)	⊤	⊤	⊤	⊤		⊤		⊤	$\neg I_3 \& \neg I_1$
	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	$I_3 \vee I_1$
(x)(Mx⊃Px)& (x)(Sx⊃Mx)	⊤	⊤				⊤		⊤	$\neg I_5 \& \neg I_4 \& \neg I_3 \& \neg I_1$
	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	$I_5 \vee I_4 \vee I_3 \vee I_1$
(x)(Sx⊃Px)	⊤	⊤		⊤	⊤	⊤		⊤	$\neg I_4 \& \neg I_1$
	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	$I_4 \vee I_1$
Barbara	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	

Am obținut rezultatul că silogismele din modul *Barbara* sunt corecte, deoarece formula corespunzătoare acestui mod silogistic este universal validă. Există cazuri de moduri silogistice admise de logica tradițională, dar respinse de logica predicatelor. Unul dintre acestea este *Darapti* din figura a III-a:

Int.	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	Cond.
Mx	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	
Px	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	
Sx	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	
(x)(Mx⊃Px)	⊤	⊤			⊤	⊤	⊤	⊤	$\neg I_5 \& \neg I_4$
	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	$I_5 \vee I_4$
(x)(Mx⊃Sx)	⊤		⊤		⊤	⊤	⊤	⊤	$\neg I_6 \& \neg I_4$
	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	$I_6 \vee I_4$
conj. prem.	⊤				⊤	⊤	⊤	⊤	$\neg I_5 \& \neg I_4 \& \neg I_6$
	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	$I_5 \vee I_4 \vee I_6$
(∃x)(Sx&Px)	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	$I_7 \vee I_3$
		⊥	⊥	⊥		⊥	⊥	⊥	$\neg I_7 \& \neg I_3$
Darapti						⊥	⊥	⊥	$\neg I_5 \& \neg I_4 \& \neg I_6 \& \neg I_7 \& \neg I_3$
	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	$I_5 \vee I_4 \vee I_6 \vee I_7 \vee I_3$

Silogismele *Darapti* sunt corecte numai dacă termenul mediu nu este vid sau dacă termenul minor şi cel major nu sunt disjuncte. De exemplu, raţionamentul:

Toţi klingonienii trăiesc într-o altă galaxie.
Toţi klingonienii sunt inamicii romulanilor.
**Unii inamici ai romulanilor trăiesc într-o altă galaxie.

nu este corect odată ce nu există klingonieni şi nici romulani.

Existenţa unor moduri silogistice în cadrul cărora pot fi construite atât silogisme corecte cât şi silogisme incorecte pune sub semnul întrebării caracterul strict formal al valorilor logice, atrăgând atenţia că valoarea logică a raţionamentelor nu depinde numai de forma logică a acestora, ci trebuie să se aibă în vedere şi conţinutul. Modurile silogistice au fost clasificate în *absolute*, cum este *Barbara*, care sunt valide necondiţionat şi *condiţionate* care sunt valide numai sub anumite constrângeri, generând distincţia între *silogistica absolută şi condiţionată.*

În tentativa de a elimina sciziunea între cele două categorii de moduri silogistice, numeroşi logicieni au dat credit lui Aristotel, considerând că silogistica tradiţională este corectă şi respingând modul în care propoziţiile silogistice sunt formalizate în limbajul predicatelor. Aceştia au introdus o serie de artificii deformând logica predicatelor. Între soluţiile la problema silogisticii condiţionate, se numără:

a) modificarea structurii unor moduri silogistice prin adăugarea unor premise existenţiale suplimentare. O asemenea perspectivă nu ţine seama de structura silogismului în limbajul natural, unde nu apar asemenea premise.

b) modificarea formalizării propoziţiilor silogistice prin adăugarea unor condiţii existenţiale pentru unele

predicate. Şi de această dată, nu se ține seama de sintaxa propozițiilor din limbajul natural.

c) limitarea silogisticii numai la anumite categorii de predicate, numite „aristotelice". Această soluție a fost dată de Jaskowski S. Predicatele aristotelice sunt nevide şi nonuniversale:

$$Ar(Fx) \equiv (\exists x)Fx\&(\exists x)\sim Fx$$

Impunând o asemenea condiție restrictivă, Jaskowski reuşeşte să valideze toate modurile silogisticii tradiționale. Cu toate acestea, nu se poate spune că silogistica absolută este salvată, deoarece în sistemul lui Jaskowski funcționează condiția de aristotelizare a predicatelor, aşa încât, corectitudinea raționamentelor este condiționată. Pe de altă parte, condiția lui Jaskowski este prea restrictivă; există silogisme corecte construite cu predicate nearistotelice. Sistemul lui Jaskowski este *incomplet* în raport cu silogistica.

d) construirea unor sisteme axiomatice în interiorul cărora modurile tradițional valide să apară ca teoreme. Cel mai cunoscut sistem axiomatic al silogisticii a fost dezvoltat de Lukasiewicz. Deoarece este doar o parte restrânsă a logicii predicatelor, sistemul axiomatic al silogisticii trebuie să conțină, pe lângă axiomele logicii predicatelor, axiome şi reguli specifice. În locul constantelor obişnuite ale limbajului predicatelor, Lukasiewicz introduce constante speciale pentru a reprezenta propozițiile silogistice, care se aplică variabilelor predicative şi nu celor individuale. În acest fel, propozițiile silogistice sunt formalizate astfel:

universal-afirmativa: Asp
universal-negativa: Esp
particular-afirmativa: Isp
particular-negativa: Osp

Axiomele specifice ale sistemului Lukasiewicz sunt(A şi I sunt simboluri primitive):

LA1. Ass
LA2. Iss
LA3. (Amp&Asm)⊃Asp
LA4. (Amp&Ims)⊃Isp

E şi *O* sunt simboluri derivate:

Esp = ~Isp
Osp = ~Asp

Sistemul axiomatic al silogisticii imaginat de Lukasiewicz nu reuşeşte să salveze silogistica absolută ca, de altfel, orice altă metodă ar fi imaginată. Condiţiile de corectitudine a silogismelor sunt mutate la nivelul axiomelor care sunt universal valide numai sub anumite condiţii. De pildă, axioma „Iss", respectiv, „Unii *S* sunt *S*", este universal validă numai dacă are loc „(∃x)Sx", (variabila *s* poate fi interpretată numai prin predicate nevide). Dacă această condiţie nu este îndeplinită, atunci are loc şi negaţia axiomei, respectiv, „Ess", adică, axioma în cauză nu este lege logică. Ori se admit axiomele lui Lukasiewicz şi, în acest caz, silogistica este scoasă în afara logicii, ori se admit presupoziţii suplimentare pentru ca axiomele respective să fie legi logice, dar, atunci, silogistica nu este absolută, ci condiţionată.

4.3. *Determinarea valorii logice a teoriilor*

Unii cercetători au considerat că logica predicatelor este suficientă pentru a dovedi că matematica este întemeiată. Această teză porneşte de la presupunerea că propoziţiile matematicii sunt tautologii, respectiv, că matematica este o parte a logicii. În acest caz, dacă propoziţiile matematicii pot

fi formalizate în limbajul predicatelor, atunci se poate construi un sistem axiomatic în cadrul logicii predicatelor care să selecteze formulele interpretabile prin propoziții ale matematicii şi numai pe acestea. Dacă un asemenea sistem există şi este parte a sistemului axiomatic al logicii predicatelor, atunci se dovedeşte că propozițiile matematicii sunt tautologii, adică sunt cu necesitate adevărate, respectiv, încrederea în teoriile matematicii este justificată.

Studiile asupra fundamentelor matematicii au redus problema întemeierii matematicii în ansamblu, la problema întemeierii aritmeticii: dacă aritmetica este întemeiată, atunci matematica este, la rândul ei, întemeiată. În acest fel, problema întemeierii matematicii se reduce la problema formalizării propozițiilor aritmeticii în limbajul predicatelor şi la determinarea sistemului axiomatic prin care să fie selectate toate formulele aritmetice valide şi numai acestea.

Deoarece aritmetica nu coincide cu logica predicatelor în ansamblu, sistemul axiomatic al aritmeticii conține, pe lângă axiomele logicii predicatelor, axiome suplimentare, iar limbajul predicatelor este îmbogățit cu noi simboluri şi constante. Cel mai potrivit pentru un asemenea scop apărea limbajul predicatelor dezvoltat în *Principia Mathematica*, la care se adaugă unele simboluri utilizate de Peano, cum ar fi „zero" şi „succesor", cât şi axiomele prin care acesta încercase o definiție implicită a numărului natural. Dacă „Natx" este predicatul „*x* este număr natural" şi Sxy = „*y* este succesorul lui *x*", atunci, axiomele lui Peano sunt următoarele:

1. Nat1 („1" este un număr natural).

2. (Natx&Sxy)⊃Naty (Succesorul unui număr natural este un număr natural).

3. Natx⊃~Sx1 („1" nu este succesorul niciunui număr natural).

4. $(x=y)\equiv(Sax\equiv Say)$ (Un număr natural are un singur succesor; această axiomă poate fi privită ca un mijloc de a introduce relația de egalitate).

5. $(Fx\&(Fx\supset(Sxy\supset Fy)))\supset(y)(Fy)$ (Dacă un număr natural satisface un predicat şi de aici decurge că şi succesorul acelui număr satisface predicatul respectiv atunci, orice număr natural satisface acel predicat).

Limbajul utilizat pentru formalizarea aritmeticii încetează să fie un limbaj formal, deoarece conține constante individuale, cum este „zero" sau predicative, cum este „succesor" Am putea să-l numim *limbaj parțial formal*, (PM).

Logicianul austriac K. Gödel a dezvoltat o demonstrație prin care arată că aritmetica nu poate fi întemeiată, oricare ar fi sistemul axiomatic ales. El argumentează că, în orice sistem axiomatic formulat în limbajul PM, (şi în orice alt limbaj suficient pentru a formaliza aritmetica), există o formulă care, deşi adevărată, nu poate fi nici demonstrată, nici respinsă cu mijloacele sistemului. Această formulă afirmă despre sine că nu este demonstrabilă în sistemul axiomatic respectiv:

G = „Formula *G* nu este demonstrabilă în sistemul *SPM*"

Putem presupune fie că *G* este demonstrabilă în *SPM*, fie că *G* nu este demonstrabilă în *SPM*. În primul caz, rezultă că este demonstrabil că *G* nu este demonstrabilă în *SPM*, prin urmare *G* nu este demonstrabilă în *SPM*. Prin urmare, în orice caz, *G* nu este demonstrabilă în *SPM*. Dar *G* tocmai asta afirmă, că nu este demonstrabilă în sistemul *SPM*, de unde urmează că *G* este adevărată în orice situație, adică este tautologie. Iată că există o tautologie care nu este demonstrabilă în nici un sistem axiomatic suficient de bogat

încât să cuprindă aritmetica. Urmează că nu există nici un sistem axiomatic consistent şi complet al aritmeticii, programul de întemeiere al aritmeticii prin scufundarea ei în logica predicatelor eşuează. Mai mult decât atât, deoarece expresia *G* este tautologie şi nu poate fi dovedită în logica predicatelor, înseamnă că, pentru logica predicatelor în ansamblu, nu se poate construi un sistem axiomatic consistent care să fie complet.

Gödel dovedeşte existenţa unei asemenea formule în PM utilizând metoda *aritmetizării*:

a) fie mulţimea *PN* a predicatelor de numere exprimabile în PM, „Fn", a căror variabilă individuală este interpretabilă pe mulţimea numerelor naturale.

b) fiecărei formule din *PN* i se poate asocia un număr şi numai unul printr-un procedeu numit *aritmetizare*. Există mai multe metode de aritmetizare. Acestea trebuie să asigure că nu există două formule cărora să le corespundă acelaşi număr. De pildă, Quine propune asocierea unei cifre fiecărui simbol din vocabularul PM. Unei formule din PN îi corespunde numărul obţinut prin înlocuirea simbolurilor conţinute de formulă prin cifrele corespunzătoare.

c) se defineşte „Rn" = „formula căreia îi corespunde numărul *n*", care este un predicat de numere din PM.

d) se notează [α, n] = „formula obţinută din α prin substituţia variabilei cu numărul *n*.

e) se defineşte predicatul Kn = ~Bew[Rn, n], respectiv, „formula obţinută din formula căreia îi corespunde numărul *n* prin substituţia variabilei cu numărul *n* nu este demonstrabilă"

f) odată ce predicatul „Kn" poate fi definit în PM, trebuie să existe o formulă *S* astfel încât [S, n] afirmă că *n* satisface *K*. Deoarece *S* este un predicat de numere, îi

corespunde un număr prin aritmetizare, cum ar fi *g*, astfel încât, S = Rg, *S* este tocmai formula cu numărul *g*.

g) ne întrebăm dacă formula [Rg, g] este demonstrabilă în PM, respectiv, dacă este demonstrabilă formula obținută din formula cu numărul *g* prin substituția variabilei sale cu numărul *g*. Aceasta este tocmai formula „~Bew[Rg, g]", adică, formula care afirmă despre sine că este nedemonstrabilă.

f) dacă [Rg, g] este demonstrabilă, înseamnă că formula „~Bew[Rg, g]" $=_{not}$ este demonstrabilă, având consecința că formula dată nu este demonstrabilă. Dacă presupunem că *G* este demonstrabilă în *SPM*, atunci este demonstrabil că nu este demonstrabilă; rămâne că *G* nu este demonstrabilă, prin urmare, *SPM* este incomplet dacă este necontradictoriu, deoarece există o expresie din PM care este tautologie dar nu este demonstrabilă în *SPM*. Nu s-a făcut nici o supoziție privind axiomele şi regulile de detaşare ale sistemului *SPM*, prin urmare, dacă în *PM* poate fi definit orice predicat de numere, urmează că nici un sistem axiomatic prin care s-ar urmări selectarea legilor logice formulabile în limbajul *PM* nu ar fi întemeiat adică nu ar fi atât consistent cât şi complet.

Unii cercetători au considerat teorema lui Gödel demonstrată şi au tras de aici numeroase consecințe de ordin epistemic şi chiar ontologic. Alți autori au considerat că teorema lui Gödel este un paradox care poate fi soluționat. Ei constată că predicatul definit de Gödel generează o contradicție pentru o anumită valoare a variabilei individuale sau a celei predicative. De pildă, pentru n=g, predicatul „~Bew(n)" devine:

$$\sim Bew(g) \equiv Bew(\sim Bew(g))$$
$$g \equiv \sim Bew(g)$$
$$\sim Bew(g) \equiv Bew(g)$$

Perelman consideră că rezultatul lui Gödel poate fi respins dacă se impun restricții asupra variabilelor individuale. Predicatul „~Bew(n)" are caracter paradoxal numai pentru argumentul *g*, deci, pentru a evita paradoxul, ar fi suficient să se excludă *g* din domeniul său de valori prin următoarea definiție:

~Bew(n) = „Formula căreia îi corespunde numărul n ≠ g nu este demonstrabilă în *S*"

La rândul său, logicianul român A. Dumitriu susține că orice paradox poate fi eliminat prin condiții puse variabilei predicative. În cazul în care un predicat este definit prin negația altuia, atunci trebuie avută în vedere regula:

$$(Fx \equiv \sim fx) \supset (F \neq f)$$

În cazul formulei lui Gödel, contradicția nu apare dacă predicatul „Bew" nu este aplicat formulelor care conțin predicatul „~Bew"

Aceste două metode limitează în mod artificial domeniile variabilelor individuale sau predicative, numai pentru că unele elemente ale acestor domenii generează paradoxuri. Avem de-a face cu soluții *ad-hoc* ale paradoxurilor; se constată că există expresii paradoxale într-un anumit limbaj şi se introduc reguli suplimentare care previn asemenea expresii, fără a se pune în lumină mecanismul paradoxurilor.

Expresia construită de Gödel este un fals paradox. Gödel nu demonstrează că *G* este o formulă a *PM*. Argumentul său că toate subexpresiile sale sunt definibile în *PM* nu este suficient, deoarece pot fi date numeroase exemple de expresii care nu sunt bine formate într-un limbaj (nu respectă sintaxa acelui limbaj) deşi părțile lor aparțin

limbajului. De exemplu, expresia E = „p&q⊃p" nu este bine formată în limbajul propoziţiilor deşi subexpresiile sale, „p&q", „q⊃p", „p", „q" sunt formule ale Lp. Mai mult, nu putem determina dacă *E* aparţine logicii propoziţiilor sau nu. În vreme ce E_1 = „(p&q)⊃p" este lege logică şi aparţine logicii, expresia E_2 = „p&(q⊃p)" nu este validă. Ar urma că logica propoziţiilor este indecidabilă, la fel cu logica predicatelor. De fapt, nu este vorba de nedecidabilitate, ci de nerespectarea sintaxei limbajului propoziţiilor în alcătuirea expresiei *E*, respectiv, *E* nu este formulă a Lp, prin urmare, nu se pune problema dacă este lege logică sau nu.

La fel, expresia *G* nu este bine formată în PM. Predicatul „Bew" este un predicat de formule, deoarece, despre formule se poate spune că sunt demonstrabile, nicidecum numerele. Dacă *G* ar fi bine formată, atunci argumentul *g* ar trebui să poată fi substituit cu formula al cărui număr este (prin aritmetizare) pusă între ghilimele. De pildă, să spunem că *h* este numărul formulei numerice „Ha". Putem elimina *h* din „~Bew(h)" astfel: „~Bew(„Ha")", respectiv, „Formula „Ha" nu este demonstrabilă în *S*. Dacă încercăm să eliminăm *g* se ajunge la o expresie nesaturată, „~Bew(„~Bew(„~Bew(...)))", care nu este formulă a limbajului *PM*, contrar presupunerii lui Gödel.

Expresia lui Gödel nu respectă sintaxa formulelor din *PM*, astfel că nu este o formulă din limbajul *PM*, aşa se explică de ce nu poate fi nici demonstrată nici respinsă în nici un sistem axiomatic al *PM*.

Dacă la un sistem axiomatic *SC* din *PM* adăugăm axioma „p&~p", noul sistem axiomatic admite ca teoreme *toate formulele din PM şi numai pe acestea*. Expresia *G* nu este demonstrabilă în sistemul *SC*, prin urmare, nu este bine formată în *PM*. Demonstraţia teoremei lui Gödel se bazează pe presupuneri eronate.

De exemplu, o altă ipoteză pe care Gödel o admite ca pe o evidență este că, în limbajul *PM*, pot fi exprimate predicate numerice. În acest mod, Gödel nu ține seama de sintaxa numerelor. Numerele nu sunt nume, deoarece propozițiile care conțin nume se comportă diferit față de cele care conțin numere. Bunăoară, propoziția „România se învecinează cu Rusia pe râul Prut" şi-a modificat valoarea de adevăr în timp, în vreme ce o propoziție precum „Patru este un multiplu de doi" are aceeaşi valoare de adevăr de-a lungul timpului. Datorită faptului că numerele nu pot fi asimilate cu numele, ele sunt expresii care au o altă sintaxă decât numele. Dacă prima propoziție este formalizată printr-un predicat binar, „Fxy", a doua propoziție nu poate fi formalizată, în acelaşi context, în acelaşi fel, ci trebuie analizată sintaxa proprie a numerelor „doi" şi „patru" pentru a obține o formalizare adecvată.

Analiza logică atrage atenția că sub denumirea generică de „număr" sau „numeral" se ascund mai multe categorii de expresii. De pildă, expresiile „doi" din contextele: „Doi copii se joacă în parc" şi „Gardul de peste drum are doi metri înălțime" nu pot fi confundate, având sintaxe diferite. În primul caz, sintaxa expresiei „doi" este aceea a unui cuantificator, pe când în cealaltă situație, sintaxa este a unei componente a unui predicat. Pentru a formaliza corect numerele în acest caz avem nevoie de analiza predicatelor, trebuie să trecem dincolo de predicate, să dezvoltăm un limbaj care să depăşească nivelul limbajului predicatelor.

SCALE

Predicatele intră în diferite relații, așa încât există *sisteme de predicate*; între acestea, se remarcă *scalele*. Prin scală înțelegem un sistem de predicate, $S = \langle f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle$, astfel încât:

a) elementele scalei sunt *incompatibile* două câte două, respectiv, oricare ar fi f_i şi f_j din scala *S*, $\sim(\exists x)(f_i x \vee f_j x)$;

b) predicatele care alcătuiesc o scală sunt *complementare*, cu alte cuvinte, $(x)(f_1 x \vee f_2 x \vee \ldots \vee f_n x)$, unde f_i sunt toate elementele scalei.

Scalele există. Orice predicat, împreună cu contradictoriul său alcătuiesc o scală şi orice predicat are un opus. Urmează că, dacă există predicate, atunci există şi scale şi orice predicat aparține cel puțin unei scale. De asemenea, relativ la o stare a lumii, o constantă individuală satisface un predicat şi numai unul al unei scale.

1. Schimbări şi transformări

Numele au proprietatea de *designare rigidă*, în orice împrejurare, un nume are acelaşi denotat, indiferent ce s-ar întâmpla cu acesta. De pildă, numele „România" are acelaşi denotat, acum, în 2010 cu acela avut în 1870, sau în 1919, sau în 1941 etc., deşi regimul său politic, teritoriul, populația, vecinii etc. s-au schimbat în timp. Dacă două nume au acelaşi

denotat atunci, orice predicat care este satisfăcut de primul nume, este satisfăcut şi de al doilea:

$$(x=y) \equiv (F)(Fx \equiv Fy)$$

Un nume folosit la două momente diferite este sinonim cu el însuşi, datorită designării rigide. Fie a_1 şi a_2 ocurenţe la momente diferite ale numelui *a*, respectiv, $a = a_1 = a_2$. Ţinând seama de relaţia anterioară, se obţine:

$$a = a_1 = a_2$$
$$(x=y) \equiv (F)(Fx \equiv Fy)$$
$$(a_1=a_2) \equiv (F)(Fa_1 \equiv Fa_2)$$
$$(F)(Fa_1 \equiv Fa_2)$$

Am obţinut că denotatul unui nume satisface aceleaşi predicate la orice moment, respectiv, logica predicatelor nu permite existenţa schimbărilor. Dacă s-ar admite că *a* suferă o schimbare de la *f* la *~f* în intervalul t_1, t_2, atunci s-ar ajunge la contradicţie:

$$\ldots \& (fa_1 \equiv \sim fa_2) \& \ldots$$

Singura soluţie la acest paradox este să se introducă o variabilă temporală în componenţa predicatelor. Variabila predicativă devine una complexă, „(F,t)x" În acest caz, legea indiscernabilităţii identicilor devine:

$$(x=y) \equiv (F)(t)((F,t)x \equiv (F,t)y)$$

Această lege nu este în contradicţie cu teza designării rigide, deoarece:

$$a = a_1 = a_2$$

$$(a_1=a_2) \equiv (F)(t)((F,t)a_1 \equiv (F,t)a_2)$$

$$(F)(t)((F,t)a_1 \equiv (F,t)a_2)$$

...& $((f,t_1)a \equiv (\sim f,t_2)a)$& (formulă care nu este contradictorie; schimbările sunt posibile)

Prin urmare, pentru ca logica predicatelor să fie consistentă, trebuie ca predicatele să fie analizate introducându-se o variabilă temporală. De altfel, fără o asemenea variabilă, logica predicatelor nu poate da seama de *timpul verbelor* din limbajul natural.

Dacă $S = <f_0, f_1, \quad f_n>$ este o scală, un obiect satisface, la orice moment, un predicat şi numai unul din *S*. La două momente diferite, are loc:

$$(f_i,t_i)a \ \& \ (f_j,t_j)a$$

introducem convenţia de scriere:

$$(f_i,t_i)a\&(f_j,t_j)a =_{not} (f_i,f_j)(t_i,t_j)a$$

Numim „schimbare" expresia „(f_i,f_j)" Expresia de mai sus, „$(f_i,f_j)(t_i,t_j)a$", unde f_i şi f_j aparţin aceleiaşi scale, admite interpretări de tipul: „*a* îşi *schimbă* starea de la f_i la f_j în intervalul de timp (t_i, t_j)", care sunt *propoziţii de schimbare*, bunăoară, „Luna şi-a schimbat culoarea din argintiu în roşu, de la miezul nopţii până dimineaţa" Aici, a = Luna, culoarea reprezintă scala, argintiu şi roşu sunt elemente ale scalei culorilor, iar „de la miezul nopţii până dimineaţa" este intervalul de timp în care a avut loc schimbarea.

Schimbările sunt perechi de elemente ale unei scale, adică, dacă *S* este o scală, S^2 reprezintă clasa tuturor schimbărilor relative la scala respectivă. Dintre acestea, un loc aparte îl au *conservările*, care sunt perechi de predicate

identice, (f_i,f_i), utilizate pentru a exprima faptul că un obiect îşi conservă starea de la un moment la altul. Schimbările pot fi *compuse*, atunci când sfârşitul intervalului temporal al primei schimbări coincide cu începutul celei de-a doua schimbări:

$$((f_i,f_j)(t_i,t_j)a\&(f_j,f_k)(t_j,t_k)a) \supset (f_i,f_k)(t_i,t_k)a$$

Părţile mulţimii schimbărilor, S^2, reprezintă *relaţii între predicate*. Acele relaţii care sunt *funcţii*, se numesc *transformări*. Prin urmare, transformările sunt funcţii din categoria $\theta:S\rightarrow S$. De exemplu, dacă S = <f, ~f>, clasele de schimbări {(f,f), (~f,f)}, {(f,~f), (~f,f)}, {(f,f), (~f,~f)}, {(f,~f), (~f,~f)} sunt transformări. Datorită faptului că au acelaşi domeniu şi codomeniu, transformările pot fi compuse, obţinându-se noi transformări.

Schimbările, la rândul lor, pot fi exprimate cu ajutorul transformărilor:

$$(f_0,f_1)(t_0,t_1)a$$
$$(f_0,f_1) \in \theta$$
$$f_1=\theta f_0$$
$$(f_0,f_1)(t_0,t_1)a \equiv (f_0,\theta f_0)(t_0,t_1)a$$

De asemenea, au loc relaţiile:

$$(f,t_0)a\&\theta(t_0,t_1)a \supset (\theta f,t_1)a$$
$$(f,t_0)a\&(\theta f,t_1)a \supset \theta(t_0,t_1)a$$

Am văzut că predicatele au o componentă temporală; totodată, ele trebuie să aibă o componentă constantă, ca elemente ale unei scale, deoarece un obiect rămâne veşnic în interiorul aceleiaşi scale. De aceea, trebuie să admitem că predicatele pot fi analizate într-o constantă, reprezentată de

termenul generic al scalei, *S*, şi o componentă care depinde de timp, care trebuie să fie *funcţie de variabila temporală*, $\alpha(t)$. Urmează că, sintaxa unui predicat este:

$$Fx \equiv \alpha(t)Sx$$

De exemplu, predicatul „*x* avea culoarea roşu la ora 14", este analizat astfel: S = culoarea, α = roşu, t = ora 14.

2. Numere

Pentru a determina predicatele care aparţin unei scale, trebuie stabilite valorile pe care le ia variabila α. Deoarece α este partea variabilă a predicatului, înseamnă că aceasta se schimbă în timp, adică este supusă transformărilor. De aceea, coeficienţii α sunt determinaţi de *transformările* posibile în interiorul scalei. Transformările, aşa cum am văzut, sunt funcţiile $\theta:S\rightarrow S$. Datorită faptului că au acelaşi domeniu şi codomeniu, transformările pot fi compuse, iar în urma compunerii a două transformări rezultă o altă transformare:

$\theta_1 o \theta_2 = \theta_3$, în unele situaţii, notăm compunerea prin alăturarea simbolurilor transformărilor:

$$\theta_1\theta_2 = \theta_3$$

Compunerea transformărilor este comutativă, asociativă şi admite ca element neutru *transformarea identică*, $I:S\rightarrow S$, If = f. O transformare poate fi compusă cu ea însăşi, reprezentând *iteraţia* transformării respective:

$\iota_n\theta = \theta\theta\theta\ldots\theta$ (de *n* ori) – iteraţia de ordinul *n* a lui θ.

Introducem notaţia:

$\iota_n\theta =_{not} n\theta$, unde *n* se numeşte *număr natural*. În acest caz,

$$1\theta = \theta$$
$$2\theta = \theta\theta$$
$$3\theta = \theta\theta\theta$$

Iterațiile pot fi, la rândul lor, compuse:

$$m\theta on\theta = k(m,n)\theta$$
$$k(m,n) =_{not} m+n, \text{ prin urmare,}$$
$$m\theta on\theta = (m+n)\theta$$

Totodată, asupra unei iterații pot interveni alte iterații:

$$m(n\theta) = k(m,n)\theta$$
$$k(m,n) =_{not} mn, \text{ astfel încât,}$$
$$m(n\theta) = mn\theta$$

Dacă o transformare, θ_1 este rezultatul iterației de ordinul *n* al altei transformări, θ, atunci, despre θ spunem că reprezintă *diviziunea* de ordinul *n* al transformării θ_1:

$$\theta_1 = n\theta$$
$$\theta = \delta_n\theta_1$$
$$\delta_n\theta =_{not} (1/n)\theta$$
$$\theta =_{not} (1/n)\theta_1$$

Expresiile „1/n" se numesc *fracții alicvote*. Fie două transformări, θ_1 și θ, astfel încât:

$m\theta_1 = n\theta$, în acest caz,
$\theta = m(1/n)\theta_1$, θ este iterația de gradul *m* a diviziunii de gradul *n* a transformării θ_1;
$m(1/n) =_{not} (m/n)$
$\theta = (m/n)\theta_1$, expresiile de forma (m/n) se numesc *numere raționale.*

Transformarea *identică* nu poate fi obținută din nici o transformare prin iterație sau diviziune. Prin convenție, îi atribuim numărul *zero*, I = 0θ, cu înțelesul că, se obține transformarea identică dacă o transformare oarecare, *θ*, nu este aplicată asupra unui predicat:

$$0\theta f = If = f$$

Numărul *zero* este unitate pentru adunarea numerelor şi element absorbant pentru înmulțire:

$$(m/n)\theta o 0\theta = ((m/n)+0)\theta = (m/n)\theta$$
$$(m/n)(0\theta) = ((m/n)0)\theta = 0\theta$$

Fie compunerea unei transformări cu inversul ei:

$$r\theta o(r\theta)^{-1} = 0\theta$$

$(r\theta)^{-1} = k(r)\theta$, unde *r* este un număr rațional, iar k(r) este o funcție de *r*;

$$r+k(r) = 0$$
$$k(r) =_{not} -r$$
$$r-r = 0$$

Numerele de forma „-r", unde *r* este rațional pozitiv, se numesc *numere raționale negative*. Împreună, acestea alcătuiesc clasa *numerelor raționale*. Prin urmare, oricare ar fi transformarea *θ* relativ la o scală *S*, sunt posibile toate transformările „rθ", unde *r* este un număr rațional, indiferent dacă este pozitiv sau negativ.

În vreme ce transformările care au coeficient pozitiv pot fi explicate prin intermediul iterațiilor şi diviziunilor transformării *θ*, transformările cărora le corespund numere negative nu pot fi explicate în acest fel. Oricât am itera sau

diviza o transformare, nu se obțin transformări negative. De aceea, pe lângă iterație și diviziune, trebuie să admitem că, asupra unei transformări acționează și o altă categorie de operații, în urma cărora se obțin transformări negative, pe care le numim *rotații*, ρ.

Între rotații, deosebim rotația care lasă o transformare neschimbată, care este *rotația unitate*, $\rho = 1$, respectiv, $1\theta=\theta$ și rotația care schimbă o transformare în inversa sa, pe care o numim *rotația inversă*, $\rho = -1$, $-1\theta = \theta^{-1} = -\theta$. Pentru a explica efectele diferite pe care le au iterația și rotația asupra transformărilor, trebuie să admitem că transformările se caracterizează prin doi parametri, pe care îi numim *mărime* și *orientare*. Iterațiile schimbă mărimea și conservă orientarea, iar rotațiile schimbă orientarea dar păstrează mărimea.

Dacă notăm mărimea transformării θ prin $|\theta|$ și orientarea prin $[\theta]$, atunci:

$\theta = |\theta|[\theta]$, o transformare se caracterizează prin mărime și orientare;

$|\theta| = |\rho_{tn}\theta|$, mărimea transformărilor este invariantă față de rotații;

$[\theta] = [\iota_n\theta]$, orientarea transformărilor este invariantă față de iterații.

Rotațiile, fiind transformări de transformări, au caracteristicile transformărilor și pot fi compuse, iterate, divizate, rotite etc., având, la rândul lor, mărime și orientare. Să determinăm care este rotația asupra căreia, aplicându-se o rotație de aceeași mărime și orientare, generează rotația inversă:

$$\rho(\rho\theta) = -\theta$$
$$\rho^2 = -1$$
$$\rho =_{not} i$$

$$i^2\theta = -\theta$$
$$i(\theta) = i\theta$$

Transformarea „iθ" nu se confundă cu θ sau -θ, ci este o altă transformare definibilă pe o scală. Aceasta poate fi, la rândul ei, iterată, divizată sau inversată, ajungându-se la o altă categorie de transformări: „riθ", unde r este un număr raţional. Expresiile „ri" se numesc *numere imaginare*. Transformările θ, -θ, iθ, -iθ diferă numai prin orientare, având aceeaşi mărime, $|\theta| = 1$. Rotaţiile unitare se aplică unele faţă de altele, conform următorului tabel:

	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-1	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	I	1	-1

Prin compunerea unei transformări raţionale şi a uneia imaginare, se obţin transformări cu orientări diferite, cărora le corespund *numerele complexe*:

$$\alpha\theta \circ \beta i\theta = (\alpha+\beta i)\theta$$

Ansamblul transformărilor complexe alcătuieşte un *plan* determinat de *axele* <r, ir>. Pentru a stabili mărimea unei transformări complexe, să observăm că, deoarece mărimea nu depinde de orientare, două transformări complexe au aceeaşi mărime dacă se substituie între ele orientările componentelor raţională şi imaginară:

$$z =_{not} \alpha+\beta i$$
$$|\alpha+\beta i| = |\alpha i+\beta| = |z|$$
$$|z|^2 = (\alpha+\beta i)(\alpha i+\beta) = \alpha^2+\beta^2$$
$$|z| = (\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$$

Deoarece $z = |z|[z]$, rezultă că orientarea unei transformări complexe se obține astfel:

$$[z] = z/|z|$$
$$[z] = (\alpha/(\alpha^2+\beta^2)+\beta i/(\alpha^2+\beta^2)) = (\mu+\nu i)$$

Se observă cu uşurință că $\mu^2+\nu^2 = 1$.

Datorită faptului că orientarea unei transformări depinde doar de mărimea rotației corespunzătoare transformării, înseamnă că:

$$[z] = (\mu(|\rho|)+\nu(|\rho|)i)$$

Mărimea rotațiilor respectă proprietățile mărimilor în general:

$$|\rho_1 \circ \rho_2| = |\rho_1|+|\rho_2|$$
$$|z\rho| = z|\rho|$$

$|\rho o1| = |\rho|$, deoarece „1" este rotația identică, având mărimea nulă: $|1| = 0$.

Mărimile rotațiilor se numesc *unghiuri* şi le notăm astfel: Ω_1, Ω_2, etc. Unghiul corespunzător rotației unitate este nul, conform celor de mai sus. Prin convenție, unghiul corespunzător rotației inverse este notat cu π. Deoarece $ioi=-1$, rezultă $|i|+|i| = \pi$, de unde, unghiul corespunzător rotației i este $|i| = \pi/2$.

Potrivit celor de mai sus, orientarea unei transformări complexe, este:

$[z] = (\mu(|\rho|)+\nu(|\rho|)i)$, respectiv,

$[z] = (\mu(\Omega)+\nu(\Omega)i)$, unde Ω este un unghi, iar $\mu(\Omega)$ şi $\nu(\Omega)$ sunt funcții de unghiuri care asociază fiecărui unghi, un număr subunitar. Introducând notațiile:

$\mu(\Omega) =_{not} \cos\Omega$; $\nu(\Omega) =_{not} \sin\Omega$, ajungem la următoarea expresie a orientării unei transformări:

$[z] = (\cos(\Omega)+i\sin(\Omega))$, unde, după cum am văzut, $\cos^2(\Omega)+\sin^2(\Omega) = 1$. Prin urmare, expresia unui număr complex este:

$z = |z|(\cos(\Omega)+i\sin(\Omega))$.

Prin compunerea a două transformări oarecare se obține transformarea:

$$\theta = z(\cos\Omega+i\sin\Omega)$$
$$\theta_1 = z_1(\cos\Omega_1+i\sin\Omega_1)$$
$$\theta\theta_1 = z(\cos\Omega+i\sin\Omega) + z_1(\cos\Omega_1+i\sin\Omega_1) =$$
$$(z\cos\Omega+z_1\cos\Omega_1)+i(z\sin\Omega+z_1\sin\Omega_1),$$ de unde, putem determina mărimea compusei:
$$|\theta\theta_1|^2 = (z\cos\Omega+z_1\cos\Omega_1)^2+(z\sin\Omega+z_1\sin\Omega_1)^2 =$$
$$z^2+z_1^2+2zz_1\cos(\Omega-\Omega_1),$$ respectiv,
$$|\theta\theta_1|^2 = |\theta|^2+|\theta_1|^2+2|\theta||\theta_1|\cos(\Omega-\Omega_1)$$

Deoarece, prin compunerea a două rotații, mărimile lor se însumează, se obțin relațiile:

$$\rho = \cos\Omega+i\sin\Omega$$
$$\rho_1 = \cos\Omega_1+i\sin\Omega_1$$
$$\rho\rho_1 = \cos(\Omega+\Omega_1)+i\sin(\Omega+\Omega_1)$$
$$\rho\rho_1 = (\cos\Omega + i\sin\Omega)(\cos\Omega_1 + i\sin\Omega_1) = (\cos\Omega\cos\Omega_1 -$$
$$\sin\Omega\sin\Omega_1) + i(\cos\Omega\sin\Omega_1 + \sin\Omega\cos\Omega_1)$$
$$\cos(\Omega+\Omega_1) = \cos\Omega\cos\Omega_1-\sin\Omega\sin\Omega_1$$
$$\sin(\Omega+\Omega_1) = \cos\Omega\sin\Omega_1+\sin\Omega\cos\Omega_1$$

Rotațiile pot fi, la rândul lor, rotite, astfel că trebuie admise *rotațiile de rotații*. De exemplu, prin rotirea cu π a rotației ρ, se obține rotația:

$$(\cos\pi+i\sin\pi)\rho = -\rho$$

Dacă ne întrebăm, care este rotația de rotații *R* astfel încât:

$$R(R\rho) = -\rho$$

trebuie să admitem că, pe lângă rotațiile de forma „cosΩ+isinΩ", trebuie să existe o altă categorie de rotații, deoarece rotațiile de rotații nu pot fi confundate cu rotațiile obișnuite; nu se poate ca într-un punct al unei drepte să existe mai multe perpendiculare pe acea dreaptă în acelaşi plan. Prin urmare, *R* nu poate fi *i*, ci trebuie introdusă o nouă rotație, *j*, perpendiculară atât pe *i* cât şi pe rotația unitate. Constatăm că există o infinitate de rădăcini pătrate din „-1" Urmează că, expresia generală a transformărilor dintr-o scală obținute pornind de la o transformare oarecare θ este:

$\theta_1 = (\alpha+i\beta+j\gamma)\theta$, unde α, β, şi γ sunt numere raționale.

Numărul „$\alpha+i\beta+j\gamma$" se numeşte *hipercomplex*. Transformările de forma „$(\alpha+i\beta+j\gamma)\theta$" alcătuiesc *clasa transformărilor generate de* θ. Transformările hipercomplexe alcătuiesc *spațiul transformărilor*, determinat de axele $<\alpha, \beta i, \gamma j>$.

Fie un predicat al scalei *S*, f_0, pe care îl numim *origine* şi o transformare, *u*, numită *unitate*. Prin aplicarea transformărilor generate de *u* asupra originii se obțin alte predicate ale scalei *S*, astfel încât, predicatele „$(\alpha+i\beta+j\gamma)uf_0$" aparțin scalei *S*. Prin convenție, exprimăm aceste predicate, determinate de o origine şi o unitate date, astfel: „$(\alpha+i\beta+j\gamma)S$" sau, simplificat, „zS" Originii îi corespunde numărul *zero*, deoarece $0uf_0 = f_0$. De exemplu, în predicatul „*x* are 2m lungime", *S* este scala lungimilor, f_0 este lungimea nulă, *u* reprezintă creşterea lungimii cu un metru, iar coeficientul „$\alpha+i\beta+j\gamma$" este numărul 2.

În cazul unor scale, iterația unității are proprietatea de *idempotență de ordinul k*, respectiv, $\iota_k u=u$. Aceste scale sunt *neproductive*. De pildă, dacă iterarea unității este idempotentă de ordinul 2, respectiv, uu=u, scala respectivă are un singur element diferit de origine: $S = \{f_0, uf_0\}$. O asemenea scală este {f, ~f} sau {1f, 0f}. Originea poate fi *naturală*, atunci când nu rezultă prin aplicarea unei transformări pozitive la un alt predicat sau *convențională*, când se alege o origine oarecare. De pildă, atât scala *Celsius* cât şi scala *Kelvin* conțin predicatele de temperatură. Diferența între ele este că, în cazul scalei *Celsius* originea este convențională, pe când, în cazul scalei *Kelvin* originea este naturală (*zero absolut*). Fiecărei categorii de scale îi corespunde o *algebră* specifică, deoarece regulile de calcul cu numere în fiecare caz în parte sunt diferite. De exemplu, regula adunării în cazul scalei {1f, 0f} de mai sus, dacă u = {(10), (01)} sunt: 1+1 = 0; 0+1 = 1 etc.

Dacă într-o scală sunt posibile diviziuni nelimitate ale unității, (nu există grad de idempotență pentru diviziune), atunci există elemente ale scalei care nu pot fi exprimate printr-un sistem <predicat origine, transformare unitate>. Fie „$2uf_0$" un predicat al scalei *S*. Dacă diviziunea este nelimitată, atunci presupunem că există predicatul $f = ruf_0$ astfel încât:

$r(ru)f_0 = 2uf_0$

$r^2uf_0 = 2uf_0$

$r^2 = 2$, dacă *r* este rațional, atunci există numerele naturale fără divizori comuni *n*, *m* astfel încât, r = m/n.

$(m/n)^2 = 2$

$m^2 = 2n^2$, *m* este divizibil cu *2*, respectiv, există numărul natural *k* astfel că m=2k.

$4k^2 = 2n^2$

$2k^2 = n^2$, *n* este, la rândul său, divizibil cu *2*, contrar ipotezei că *m* şi *n* sunt fără divizori comuni. Prin urmare, nu

există nici un număr *raţional*, r, astfel încât $f = ruf_0$; predicatul f nu poate fi exprimat cu ajutorul unităţii u şi a originii f_0.

Predicatul f există, pentru că altfel, diviziunea nu ar fi nelimitată în S aşa cum s-a presupus de la început, dar nu poate fi exprimat cu ajutorul originii şi unităţii respective. Într-un alt sistem <origine, unitate> predicatul f ar deveni exprimabil, de pildă am putea alege chiar pe f ca origine.

Pentru a extinde exprimabilitatea şi în asemenea cazuri, au fost postulate *numerele iraţionale* care, împreună cu numerele raţionale alcătuiesc clasa numerelor *reale*. Predicatele care nu pot fi exprimate prin intermediul unui număr raţional ar putea fi exprimate, în acest mod, prin intermediul numerelor iraţionale. Procesul de introducere a numerelor iraţionale pare la fel de legitim cu acela al introducerii numerelor fracţionare, negative sau complexe. Totuşi, nu există temei pentru numerele iraţionale deoarece lor nu le este asociată nici o operaţie asupra unităţii; nu există nici o iteraţie, diviziune, rotaţie etc., a unităţii care să genereze vreo transformare exprimabilă printr-un număr iraţional. De aceea, operaţiile asupra numerelor raţionale *nu pot fi extinse asupra numerelor iraţionale*. Cei care susţin că există numere iraţionale sunt în confuzie, ei consideră demonstraţia de mai sus, că nu există suficiente numere raţionale pentru a exprima toate predicatele dintr-o scală prin aceeaşi origine şi unitate, ca fiind o demonstraţie că există numere iraţionale, transformând o demonstraţie de nonexistenţă în una de existenţă.

Numerele iraţionale nu se supun operaţiilor cu numere, bunăoară, ele nu pot fi adunate. Dacă se consideră că numerele iraţionale există, atunci trebuie să se renunţe la teza că adunarea este peste tot definită în mulţimea numerelor reale. Notaţiile introduse pentru predicatele inexprimabile

prin numere raționale, nu pot fi asimilate numerelor. De pildă, cum este număr notația „e", odată ce numerele sunt compuse din cifre? Care este şirul cifrelor numărului notat cu „e"? Desigur că nimeni nu va fi în stare să le enumere vreodată sau să ofere vreo regulă a succesiunii lor atâta vreme cât *e* nu este rațional. De aceea, despre „numărul *e*", ca şi despre toate numerele iraționale, se poate vorbi numai metaforic.

Se deosebesc următoarele tipuri de propoziții simple:

a) propoziții de *stare*, care presupun că un obiect satisface un anumit predicat al unei scale, „$\alpha(t)Sa$" De exemplu, „Ieri, la ora 14, *a* era roşu" sau „La ora 15, *a* era la 2 km depărtare" etc.

b) propoziții de *schimbare*, care presupun că, într-un anumit interval de timp, un obiect şi-a modificat poziția într-o scală, „$(\alpha\beta)(t_0t_1)Sa$" Din această categorie fac parte propoziții de forma: „Lungimea lui *b* a crescut de la ora 15 la ora 16, de la 2m la 4m" sau „Temperatura bolnavului *a* s-a modificat de la $37,5^0$C la 39°C de la ora 20 la ora 24" etc.

c) propoziții de *transformare*, prin intermediul cărora se presupune că, într-un interval temporal, un obiect a suferit o anumită transformare, „$\alpha(t_0t_1)Ta$" De exemplu, „De ieri până astăzi, adâncimea apelor Dunării a crescut cu 7 m" sau „De anul trecut până acum, greutatea lui *b* a scăzut cu 10 kg" etc.

Propozițiile din aceste categorii servesc drept premise şi concluzii în diferite tipuri de raționamente:

a) raționamente în care, dintr-o propoziție de stare şi o propoziție de schimbare rezultă o propoziție de stare: „$\alpha(t_0)Sa, (\alpha\beta)(t_0t_1)Sa/^{**}\beta(t_1)Sa$"

b) raționamente în care, dintr-o propoziție de stare şi o propoziție de transformare rezultă o propoziție de stare: „$\alpha(t_0)$Sa, $\beta(t_0t_1)$Ta/**$(\alpha+\beta)(t_1)$Sa"

c) raționamente unde, din două propoziții de stare rezultă una de schimbare, sau una de transformare: „$\alpha(t_0)$Sa, $\beta(t_1)$Sa/**$(\alpha\beta)(t_0t_1)$Sa", „$\alpha(t_0)$Sa, $\beta(t_1)$Sa/**$(\beta-\alpha)(t_0t_1)$Ta"

d) raționamente în care, din două propoziții de transformare rezultă o propoziție de transformare: „$\alpha(t_0t_1)$Ta, $\beta(t_1t_2)$Ta/**$(\alpha+\beta)(t_0t_2)$Ta"

e) raționamente în care, din două propoziții de schimbare rezultă o propoziție de schimbare: „$(\alpha\beta)(t_0t_1)$Sa, $(\beta\gamma)(t_1t_2)$Sa/**$(\alpha\gamma)(t_0t_2)$Sa" etc.

Iată câteva exemple de raționamente corecte din categoriile de mai sus:

La ora 19, *a* era roşu.

De la ora 19 la ora 21, *a* şi-a schimbat culoarea din roşu în portocaliu.

**La ora 21 *a* era portocaliu.

Ieri dimineață, apele râului *a* aveau 8 m adâncime.

De ieri dimineață, până azi dimineață, adâncimea apelor râului *a* au scăzut cu 2 m.

**Azi dimineață, apele râului *a* aveau 6 m adâncime.

La ora 12, temperatura pacientului *b* era de 35^0C.

La ora 21, temperatura pacientului *b* era de 38^0C.

**De la ora 12 la ora 21, temperatura pacientului *b* a crescut cu 3^0C.

3. Mişcări

Nu numai starea unui obiect este variabilă în timp, ci şi transformările la care acesta este supus depind de timp. Schimbările unui obiect ca urmare a transformărilor suferite

într-un interval de timp, constituie *mişcarea* acelui obiect în raport cu scala *S* în intervalul temporal respectiv. Prin urmare, formula mişcării obiectului *a* relativ la scala *S* este:

z_0Sa & $y(t)(t_0t)Ta \supset (z_0+y(t))(t)Sa$, „dacă *a* este în starea z_0S la momentul t_0 şi suferă transformarea $y(t)$ în intervalul (t_0, t) atunci, la momentul *t*, *a* se află în starea $(z_0+y(t))S$"

Dacă funcţia „y(t)" este dezvoltată în serie pentru momentul t_0 şi dacă presupunem că derivatele de grad superior lui 2 sunt nule, atunci mişcarea unui obiect faţă de o scală poate fi analizată astfel:

$$y(t)Ta = (y(t_0)+y'(t_0)(t-t_0)+y''(t_0)((t-t_0)^2/2))Ta$$

Deoarece la momentul t_0 asupra lui *a* nu a acţionat încă nici o transformare, $y(t_0) = 0$

$y(t)Ta = (y'(t_0)(t-t_0)+y''(t_0)((t-t_0)^2/2))Ta$, de unde rezultă:

z_0Sa & $(y'(t_0)(t-t_0)+y''(t_0)((t-t_0)^2/2))Ta \supset (z_0+y'(t_0)(t-t_0)+y''(t_0)((t-t_0)^2/2)Sa$

Derivata de ordinul I al funcţiei y(t) reprezintă *viteza* mişcării, ω, iar derivata de ordinul II se numeşte *acceleraţie*, ϖ. Cu aceste notaţii legea mişcării devine:

$$z_0Sa \;\&\; (\omega_0(t-t_0)+ \varpi_0((t-t_0)^2/2))Ta \supset (z_0+\omega_0(t-t_0)+ \varpi_0((t-t_0)^2/2))Sa$$

$$z_0Sa \;\&\; (\omega_0t+\varpi_0(t^2/2))Ta \supset (z_0+\omega_0t+\varpi_0(t^2/2))Sa$$, unde am considerat $t_0=0$

Mişcările care se desfăşoară după legea de mai sus se numesc *uniform accelerate*. Legile mişcării permit stabilirea corectitudinii unor noi tipuri de raţionamente, precum:

La momentul t_0, *a* s-a aflat în starea zS.

În intervalul (t_0t_1), *a* s-a mişcat relativ la scala *S* cu viteza constantă ω.

**La momentul t_1, *a* s-a aflat în starea $(z+\omega(t_1-t_0))S$.

La momentul t_0, *a* s-a aflat în starea z_0S.

La momentul t_1, *a* s-a aflat în starea z_1S.

**În intervalul (t_0t_1), *a* s-a mişcat faţă de scala *S* cu viteza medie $\omega = (z_1-z_0)/(t_1-t_0)$.

Până acum, nu s-a avut în vedere faptul că obiectele alcătuiesc sisteme, interacţionând între ele. Determinarea legilor logice ale stărilor, transformărilor şi mişcărilor suferite de un obiect în raport cu o scală, trebuie să ia în considerare că acel obiect aparţine unui sistem. Fie $s = <a_1, a_2, \ldots, a_n>$ un sistem de obiecte. Starea sistemului la un moment oarecare, *t* faţă de scala *S*, este determinată de stările elementelor sale:

$$z_1(t)Sa_1 \,\&\, z_2(t)Sa_2 \,\&\, \quad \& \, z_n(t)Sa_n =_{not} < z_1(t), z_2(t), z_n(t)>Ss$$

Introducem, prin definiţie, *centrul de inerţie* al sistemului *s*, ca fiind predicatul corespunzător mediei aritmetice a coeficienţilor elementelor sistemului:

$$(1/n)(z_1(t)+z_2(t)+\ldots+z_n(t))Ss =_{not} Z(t)S\sigma$$

Dacă *s* este divizat în subsisemele disjuncte s_i, fiecare dintre acestea are propriul centru de inerţie:

$$(1/k_i)(z_1(t)+z_2(t)+\ldots+z_{ki}(t))Ss_{ki} =_{not} Yi(t)S\sigma_i, \text{ astfel încât,}$$
$$k_iY_i = z_1(t)+z_2(t)+\ldots+z_{ki}(t)$$

Ţinând seama că s_i sunt disjuncte şi $n = k_1+k_2+\ldots+k_m$, centrul de inerţie al sistemului *s* poate fi obţinut prin relaţia:

$$Z(t)S\sigma = (1/n)(k_1Y_1(t)+k_2Y_2(t)+\ldots+k_mY_m(t))S\sigma_i, \text{ respectiv,}$$
$$Z(t)S\sigma = ((\Sigma k_iY_i)/\Sigma k_i)S\sigma$$

Operatorii „k_i" caracterizează subsistemele cărora îi corespund, adică, indiferent din ce sistem ar face parte, subsistemului respectiv i-ar corespunde acelaşi operator. Vom numi acest operator *masă*, $k =_{not} m$, respectiv, mMs = „sistemul *s* are masa *m*" Cu aceste notaţii, centrul de inerţie al unui sistem este:

$$Z(t)S\sigma = ((\Sigma m_iY_i)/\Sigma m_i)S\sigma$$

„Σm_i" este *masa sistemului s* pe care o notăm cu m_s:

$$Z(t)S\sigma = ((\Sigma m_iY_i)/m_s)S\sigma$$

Masa nu se modifică în timp, deoarece chiar dacă sistemul din care face parte subsistemul respectiv s-ar schimba, masa subsistemului rămâne aceeaşi. De aceea, masa caracterizează *starea* unui sistem ca parte a altor sisteme. Starea unui sistem relativ la o scală *S*, pentru care introducem notaţia *Q*, se caracterizează prin predicatul din cadrul scalei satisfăcut la un moment dat şi prin predicatul de masă specific sistemului:

$$mMs \;\&\; z(t)Ss =_{df} mz(t)Qs$$
$$mz(t) =_{not} u(t)$$
$$mz(t)Qs = u(t)Qs$$

În acest fel, *legea de mişcare* a centrului de inerţie a unui sistem este:

$$u_0Qs \;\&\; my(t)Ts \supset u(t)Qs, \text{ unde } u(t) = u_0+my(t).$$

Funcția y(t) poate fi dezvoltată în serie, când, sub ipoteza că derivata de ordinul 2 este constantă, se obține următoarea relație:

$$(u_0Qs \,\&\, m(y'(t_0)(t-t_0)+y''(t_0)((t-t_0)^2/2)Ts) \supset (ut_0+m(y'(t_0)(t-t_0)+y''(t_0)((t-t_0)^2/2))Qs$$

dacă presupunem că $t_0 = 0$, atunci, legea mișcării devine:

$$(u_0Qs \,\&\, m(y_0't+y_0''(t^2/2))Ts) \supset (u_0+m(y_0't+y_0''(t^2/2)))Qs$$

Ținând seama că $y' = \omega$ și $y'' = \varpi$, se ajunge la:

$$(u_0Qs \,\&\, m(\omega_0t+\varpi_0(t^2/2))Ts) \supset (u_0+m(\omega_0t+\varpi_0(t^2/2)))Qs$$

Sistemul *s*, care la momentul t_0 se afla în starea u_0Q, după ce suferă mișcarea $(\omega_0t+\varpi_0(t^2/2))T$, ajunge în starea $(u_0+m(\omega_0t+\varpi_0(t^2/2)))Q$.

Mișcarea unui sistem *s* este analizată prin componentele „mω" și „mϖ" Prima dintre acestea se numește *impuls*, *H*, iar a doua se numește *forță*, Φ. Cu aceste notații, legea de mișcare a centrului de inerție al unui sistem de constante individuale devine:

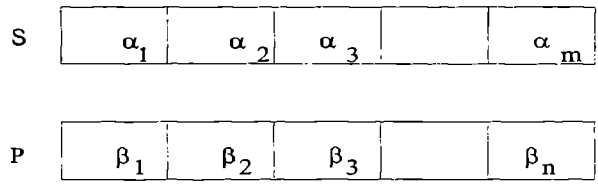
$$(u_0Qs \,\&\, (H_0t+\Phi_0(t^2/2))Ts) \supset (u_0+(H_0t+\Phi_0(t^2/2)))Qs$$

Logica pornește de la ipoteza privind independența constantelor individuale. Două expresii, „fa" și „gb" sunt independente, adică sunt interpretate independent pe **V**, atâta vreme cât *a* și *b* sunt constante individuale diferite. Vedem, însă, că obiectele alcătuiesc sisteme, influențându-se unul pe altul. Prin urmare, teza independenței propozițiilor simple cu referință diferită este eronată. Probabil că, *principiul inerției*, așa cum este admis astăzi, ar trebui reformulat pentru a

evidenția interacțiunile din cadrul sistemelor de obiecte. Principiul: „Orice corp asupra căruia nu se exercită o forță se mişcă rectiliniu şi uniform sau se află în repaus față de un sistem de referință inerțial" priveşte situația în care corpul respectiv este izolat, adică, are în vedere un caz ideal, irealizabil. În fapt, principiul inerției trebuie să dea seama de existența sistemelor de corpuri, cât şi de tendința centrelor de inerție dintr-un sistem de a se unifica, ceea ce conduce la mişcarea subsistemelor spre centrul de inerție cu o viteză proporțională cu masa celorlalte subsisteme şi invers proporțională cu distanța față de celelalte subsisteme. Dacă un asemenea principiu ar fi adăugat principiilor logicii, legea atracției universale ar fi dovedită ca lege logică, fără a fi nevoie de ipoteze extravagante privind natura gravitației.

CORELAȚII

Fiind incompatibile şi complementare, predicatele unei scale divid domeniul constantelor individuale în clase disjuncte între ele. Două scale oarecare, *S* şi *P* generează două diviziuni ale domeniului *D*:



Un predicat aparținând scalei *S*, $\alpha_i S$, poate fi compatibil cu unele predicate din *P*, $\beta_j P$, şi incompatibil cu altele. Exprimăm faptul că $\alpha_i S$ are în comun cu $\beta_j P$ un număr de *k* constante individuale (care le satisfac simultan), prin „$(kx)(\alpha_i Sx \& \beta_j P)$" Conjuncția propozițiilor care presupun modul în care se distribuie elementele clasei predicatului $\alpha_i S$ peste clasele predicatelor $\beta_j P$ se numeşte *propoziție de repartiție*, „$\&_j(k_j x)(\alpha_i Sx \& \beta_j P)$" De exemplu, dacă S = <S, ~S>, P = <P, ~P> sunt două scale, atunci propoziția „Zece *S* sunt *P* iar ceilalți cinci *S* sunt ~P" este de repartiție.

1. Propoziții de repartiție şi de corelație

Propozițiile de repartiție pot fi reprezentate cu ajutorul *tabelelor de repartiție*:

P	β_1	β_2	...	β_n
$\alpha_i S$	k_1	k_2	...	k_n

Cuantificatorii numerici k_i se mai numesc *frecvenţe*. Din propoziţiile de repartiţie care au cuantificatori numerici pot fi obţinute propoziţii de repartiţie care au cuantificatori existenţiali, *k'*, astfel:

$$k'=1 \equiv k\neq 0$$
$$k'=\varnothing \equiv k=0$$

De exemplu, din propoziţia de repartiţie numerică „Zece *S* sunt *P* şi zero *S* sunt ~P" se obţine propoziţia de repartiţie cu cuantificatori existenţiali: „Există *S* care sunt *P* şi nu există nici un *S* care este ~P"

Propoziţiile care exprimă repartiţiile tuturor elementelor unei scale peste o altă scală, se numesc *propoziţii de corelaţie*. Forma unei propoziţii de corelaţie este: $(\&_j(k_{1j}x)(\alpha_1 Sx\&\beta_j P)) \ \& \ (\&_j(k_{2j}x)(\alpha_2 Sx\&\beta_j P)) \ \& \ \& \ (\&_j(k_{mj}x)(\alpha_m Sx\&\beta_j P)) = \&_{ij}(k_{ij}x)(\alpha_i Sx\&\beta_j P)$. Propoziţiile de corelaţie pot fi reprezentate sub formă de tabel:

S\P	β_1	β_2	...	β_n
α_1	k_{11}	k_{12}		k_{1n}
α_2	k_{21}	k_{22}		k_{2n}
α_n	k_{m1}	k_{m2}	...	k_{mn}

2. Reprezentarea matriceală a propoziţiilor de corelaţie

Tabelele de corelaţie pot fi scrise sub forma unor *matrice*, unde liniile reprezintă scalele iar coloanele stau pentru clasele în care scalele respective divid domeniul constantelor individuale:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix}\alpha_i k_{ij} \\ \beta_j k_{ij}\end{bmatrix}(D)$$

De exemplu, să convertim în matrice tabelul de corelație următor:

S\P	1	2	3
1	5	0	7
2	0	0	10

Se obține matricea:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} 1.5 & 1.0 & 1.7 & 2.0 & 2.0 & 2.10 \\ 1.5 & 2.0 & 3.7 & 1.0 & 2.0 & 3.10 \end{bmatrix}(\mathrm{D})$$

Interpretarea matricei este: „Un 1S este 1P şi nici un 1S nu este 2P şi şapte 1S sunt 3P şi nici un 2S nu este 1P şi şi zece 2S sunt 3P" Avantajul scrierii matriceale a corelațiilor este că pot fi reprezentate, prin aceeaşi matrice, corelații între mai multe scale, nu numai pentru două scale, ca în reprezentarea tabelară. De exemplu, iată o corelație între trei scale:

$$\begin{matrix} S \\ P \\ R \end{matrix}\begin{bmatrix} \alpha_i k_{ijl} \\ \beta_j k_{ijl} \\ \gamma_l k_{ijl} \end{bmatrix}(\mathrm{D})$$

Elementele matricelor conțin *cuantificatori*, *k*, care pot fi numerici sau existențiali şi *coeficienți numerici* care determină predicatul în scala respectivă. Cuantificatorii pot fi determinați sau nedeterminați. De pildă, cuantificatori precum „1", „2" etc. sunt determinați, în schimb ce „între 5 şi 10", „mai mult decât şapte", „mai puțin decât 20" sunt cuantificatori nedeterminați într-un grad mai mare sau mai mic.

Convenim să notăm cuantificatorii existenţiali prin „C_i" Aceştia pot fi, la rândul lor, determinaţi şi nedeterminaţi:

Cuantificator	Notare
Există	1
Nu există	∅
Nedeterminat	C

De pildă, „α1Sx" are interpretarea „Există *x* astfel încât αSx", iar „α∅Sx" înseamnă „Nu există nici un *x* astfel încât αSx". Cuantificatorii existenţiali pot fi înţeleşi drept cuantificatori numerici. Cuantificatorul „există" este, de fapt, cuantificatorul numeric „cel puţin unul", iar cuantificatorul „nu există" este cuantificatorul numeric „zero"

Aidoma cuantificatorilor, coeficienţii numerici sunt determinaţi, de pildă, „2,5", „3+4i", „7/13" şi nedeterminaţi, „între 2 şi 3", „peste 2,7", „sub 3,14" etc. De exemplu, în propoziţia „Doi copii au peste 1,8 m înălţime, în vreme ce mai mulţi decât 4 copii au sub 1,7 m înălţime" întâlnim cuantificatorii „doi", care este determinat, şi „mai mulţi decât patru", nedeterminat, cât şi coeficientul determinat „1,8" şi coeficientul nedeterminat „sub 1,7"

Introducem *produsul logic* şi *suma logică* a coeficienţilor predicatelor pentru a calcula coeficientul compunerii conjuncte şi a compunerii sumative a două predicate. În urma compunerii conjuncte a două predicate se obţine un predicat a cărui clasă este intersecţia claselor compuşilor. Coeficientul predicatului compus este produsul coeficienţilor compuşilor:

$\alpha k_1 Ss \ \& \ \beta k_2 Pp = (\alpha k_1 S \times \beta k_2 P)C(s \cap p)$, unde *s* şi *p* sunt clasele corespunzătoare celor două predicate. Se adaugă cuantificatorul existenţial *C* deoarece intersecţia poate fi vidă chiar dacă cele două clase nu sunt vide.

Dacă se compun conjunct predicate din aceeaşi scală, se obţine:

$$\alpha k_1 Ss_1 \,\&\, \beta k_2 Ss_2 = (\alpha k_1 S \times \beta k_2 S)C(s_1 \cap s_2) = (\alpha \times \beta)k_1 k_2 CS(s_1 \cap s_2)$$

Produsul logic al coeficienţilor numerici este asociativ şi comutativ, având coeficientul nedeterminat drept unitate, iar coeficientul vid este element absorbant.

Prin compunerea sumativă a două predicate a căror clase sunt disjuncte se obţine un predicat a cărui clasă este reuniunea claselor celor două predicate compuse. Coeficientul compunerii sumative este:

$$\alpha k_1 Ss \,\&\, \beta k_2 Pp = (\alpha k_1 S \wedge \beta k_2 P)(s \cup p)$$

În cazul în care se compun sumativ predicate din aceeaşi scală, se obţine:

$$\alpha k_1 Ss_1 \,\&\, \beta k_2 Ss_2 = (\alpha k_1 S \wedge \beta k_2 S)(s_1 \cup s_2) = (\alpha \wedge \beta)(k_1 + k_2)S(s_1 \cup s_2).$$

Operaţia „$\wedge$" asupra coeficienţilor numerici se numeşte *sumă logică.*

Compunerea conjunctă şi compunerea sumativă a predicatelor corespund, în cazul reprezentării matriceale a corelaţiilor, produsului liniilor şi, respectiv, sumei logice a coloanelor acestora:

a) produsul liniilor unei matrice:

$$\begin{matrix} S \\ P \\ R \end{matrix}\begin{bmatrix} \alpha_i k_{ijl} \\ \beta_j k_{ijl} \\ \gamma_l k_{ijl} \end{bmatrix} = \begin{matrix} < S, P > \\ R \end{matrix}\begin{bmatrix} (\alpha_i k_{ijl} \times \beta_j k_{ijl})C \\ \gamma_l k_{ijl} \end{bmatrix} = \begin{matrix} < S, P > \\ R \end{matrix}\begin{bmatrix} (\alpha_i \times \beta_j)C k_{ijl} k_{ijl} \\ \gamma_l k_{ijl} \end{bmatrix}$$

b) suma coloanelor:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 k_1 & \alpha_0 k_0 \\ \beta_1 k_1 & \beta_0 k_0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 k_1 \wedge \alpha_0 k_0 \\ \beta_1 k_1 \wedge \beta_0 k_0 \end{bmatrix}$$

În operațiile asupra matricelor trebuie respectate următoarele principii de conservare:

a) *principiul de conservare a existenței*: cardinalul claselor nu se schimbă în urma operațiilor asupra matricelor;

b) *principiul conservării informației*: coeficienții predicatelor nu se schimbă în urma operațiilor asupra matricelor.

3. Corelații între scale binare

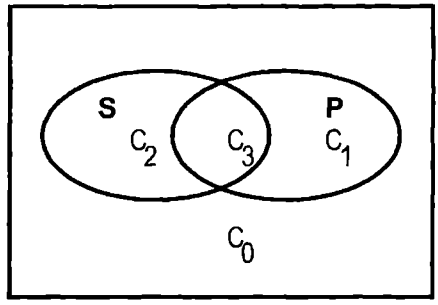
Pentru a exemplifica modul în care decurge calculul asupra corelațiilor, ne oprim asupra corelațiilor între scalele cele mai simple, alcătuite din două predicate. O asemenea scală conține un predicat şi contradictoriul acestuia, S = {f, ~f}. Convenim să introducem următorii coeficienți numerici: f = 1S $=_{not}$ S; ~f = 0S.

Matricea corelației între două scale binare, *S* şi *P*, este:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} k_3 & k_2 & 0k_1 & 0k_0 \\ k_3 & 0k_2 & k_1 & 0k_0 \end{bmatrix}$$(D), pentru cuantificatori numerici şi

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} C_3 & C_2 & 0C_1 & 0C_0 \\ C_3 & 0C_2 & C_1 & 0C_0 \end{bmatrix}$$(D), pentru cuantificatori existențiali.

Matricele care reprezintă corelații pot fi reprezentate grafic:



Se constată că fiecărei coloane a matricei îi corespunde o regiune a domeniului D şi reciproc.

Dacă se dezvoltă după prima linie ultima matrice, se ajunge la:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} C_3 \wedge C_2 & 0C_1 \wedge 0C_0 \\ C_3 \wedge 0C_2 & C_1 \wedge 0C_0 \end{bmatrix}(\mathrm{D})$$

Am obţinut, pe ultima linie, forma generală a coeficienţilor unei scale cu două elemente, $(1C_1 \wedge 0C_0)S(D)$. În funcţie de valorile cuantificatorilor existenţiali, sunt introduşi coeficienţi generalizaţi (determinaţi şi nedeterminaţi). Coeficienţii determinaţi sunt daţi de valorile determinate ale cuantificatorilor existenţiali:

C_1	C_0	Coeficient
1	1	$1 \wedge 0$
1	$\varnothing$	1
$\varnothing$	1	0
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Introducem notaţia: $1 \wedge 0 =_{not}$ h. Acest coeficient arată că în domeniul D există atât constante individuale care satisfac predicatul S cât şi constante care satisfac predicatul 0S.

Coeficientul vid reprezintă cazul în care domeniul este vid, $\varnothing S(D) \equiv (D = \varnothing)$. Prin urmare, clasa coeficienților determinați pentru o scală binară este $K = \{\varnothing, 1, 0, h\}$. Părțile acestei clase reprezintă categoria coeficienților pentru o scală binară. Se obțin 16 asemenea coeficienți.

Coef.	Interpretare	Cuant.	
		C_1	C_0
$\varnothing S$	$D = \varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
1S	$(\exists x)Sx\&\sim(\exists x)0Sx$	1	$\varnothing$
0S	$\sim(\exists x)Sx\&(\exists x)0Sx$	$\varnothing$	1
hS	$(\exists x)Sx\&(\exists x)0Sx$	1	1
{1,0}S	$((\exists x)Sx\&\sim(\exists x)0Sx)v(\sim(\exists x)Sx\&(\exists x)0Sx)$	C	$\bar{C}$
{1,h}S	$((\exists x)Sx\&\sim(\exists x)0Sx)v((\exists x)Sx\&(\exists x)0Sx)$	1	C
{0,h}S	$((\exists x)Sx\&(\exists x)0Sx)v(\sim(\exists x)Sx\&(\exists x)0Sx)$	C	1
{1,0,h}S	$((\exists x)Sx\&\sim(\exists x)0Sx)v(\sim(\exists x)Sx\&(\exists x)0Sx)v((\exists x)Sx\&(\exists x)0Sx)$	C_1	C_0

Ceilalți opt coeficienți sunt obținuți adăugând disjunctiv condiția ca domeniul să fie vid, la fiecare dintre coeficienții din tabelul de mai sus. Un asemenea coeficient este reprezentat prin adăugarea unui cuantificator existențial. De pildă, $0CS(D) = (\sim(\exists x)Sx\&(\exists x)0Sx)v(D=\varnothing)$. Coeficientul {1,0,h} se numeşte *nedeterminat* şi îl notăm cu *n*. Coeficienților generalizați le corespund reprezentări grafice ale repartiției elementelor domeniului *D* între elementele unei scale.

Operațiile asupra coeficienților generalizați au loc conform următoarelor tabele:

a) produsul şi suma cuantificatorilor existențiali

C_1C_0	1	$\varnothing$	C_1+C_0	1	$\varnothing$
1	1	$\varnothing$		1	1
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$		1	$\varnothing$

b) produsul logic al coeficienților generalizați

$\alpha\times\beta$	$\varnothing$	1	0	h	$1\wedge 0C$	$0\wedge C$	$C\wedge 0\bar{C}$	n
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
1	$\varnothing$	1	$\varnothing$	$\varnothing$	1	$\varnothing$	1	1
0	$\varnothing$	$\varnothing$	0	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	0
h	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	h	h	h	$\varnothing$	h
$1\wedge 0C$	$\varnothing$	1	$\varnothing$	h	$1\wedge 0C$	h	1	$1\wedge 0C$
$0\wedge C$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	h	h	$0\wedge C$	0	$0\wedge C$
$C\wedge 0\bar{C}$	$\varnothing$	1	0	$\varnothing$	1	0	$C\wedge 0\bar{C}$	$C\wedge 0\bar{C}$
N	$\varnothing$	1	0	h	$1\wedge 0C$	$0\wedge C$	$C\wedge 0\bar{C}$	n

c) suma logică a coeficienților generalizați

$\alpha\wedge\beta$	$\varnothing$	1	0	h	$1\wedge 0C$	$0\wedge C$	$C\wedge 0\bar{C}$	n
$\varnothing$	$\varnothing$	1	0	h	$1\wedge 0C$	$0\wedge C$	$C\wedge 0\bar{C}$	n
1	1	1	h	h	$1\wedge 0C$	h	$1\wedge 0C$	$1\wedge 0C$
0	0	h	0	h	h	$0\wedge C$	$0\wedge C$	$0\wedge C$
h	h	h	h	h	h	h	h	h
$1\wedge 0C$	$1\wedge 0C$	$1\wedge 0C$	h	h	$1\wedge 0C$	h	$1\wedge 0C$	$1\wedge 0C$
$0\wedge C$	$0\wedge C$	h	$0\wedge C$	h	h	$0\wedge C$	$0\wedge C$	$0\wedge C$
$C\wedge 0\bar{C}$	$C\wedge 0\bar{C}$	$1\wedge 0C$	$0\wedge C$	h	$1\wedge 0C$	$0\wedge C$	n	n
N	n	$1\wedge 0C$	$0\wedge C$	h	$1\wedge 0C$	$0\wedge C$	n	n

Coeficientul *h* este element absorbant, iar coeficientul vid este element neutru față de suma logică. Se observă egalitățile: $1\wedge 0C = 1\wedge n$ și $0\wedge C = 0\wedge n$, care ne permit o altă formă de scriere a coeficienților respectivi. De asemenea, se obțin interpretările:

$(1\wedge 0C)S(D) = (1\wedge n)S(D)$ = „O parte dintre elementele lui *D* sunt *S*, iar despre celelalte nu se știe nimic"

$(0 \wedge C)S(D) = (0 \wedge n)S(D)$ = „O parte dintre elementele lui *D* nu sunt *S*, iar despre celelalte nu se ştie nimic"

Coeficientul corespunzător unei părţi a domeniului *D* dacă se cunoaşte coeficientul lui *D*, se calculează astfel:

$A \subset D = (\alpha S(D) \supset g(\alpha)S(A))$, unde operatorul *g* se calculează conform tabelului:

α	**∅**	**1**	**0**	**h**	**1∧n**	**0∧n**	**C∧0$\bar{C}$**	**n**
g(α)	∅	1	0	n	n	n	C∧0$\bar{C}$	n

Dacă h $D), atu ni c o p te a lu i *D* poate avea orice coeficient, respectiv, nS(A). Invers, dacă αS(A) şi *A* este o parte a domeniului *D*, atunci $(\alpha \wedge n)S(D)$, deoarece coeficientul complementarei unei clase este independent de coeficientul clasei.

Propoziţiile cuantificate, cum sunt propoziţiile de existenţă sau propoziţiile de predicaţie, pot fi considerate corelaţii şi admit o reprezentare matriceală. Propoziţiile de existenţă sunt reprezentate prin matrice cu o singură linie. O propoziţie precum „*S* există" poate fi înţeleasă drept o repartiţie existenţială a elementelor domeniului *D* peste scala *S*: „Există elemente ale lui *D* care sunt *S* şi nu ştim dacă există elemente ale lui *D* care nu sunt *S*" Matricea corespunzătoare acestei repartiţii este: $S[1 \quad 0C](D)$. Celelalte propoziţii de existenţă au reprezentarea:

„*S* nu există" $S[0C](D)$. Dacă se acceptă că domeniul nu este vid, atunci reprezentarea matriceală a propoziţiilor de forma amintită este $S[0](D)$, deoarece C = 1.

„~*S* există" - $S[1C \quad 0](D)$;

„~*S* nu există" - $S[1](D)$;

„Există cinci *S*" - $S[1.5 \quad 0C]$(D);

„Există cel puțin cinci *S*" - $S[1.(5+k) \quad 0C]$(D);

Expresii precum „Cinci *S* nu există" nu sunt propoziții deoarece, ceea ce nu există nu poate fi numărat sau cuantificat.

Propozițiile de predicație de forma „kαS sunt βP" sunt reprezentate prin matrice cu două linii, dezvoltată după linia subiectului. Propozițiile universal-afirmative, „Toți *S* sunt *P*", sunt prescurtări ale propozițiilor de corelație: „Nu există *S* care nu sunt *P* şi nu ştim nimic despre 0S" Cu alte cuvinte, clasa constantelor individuale care satisfac *S* şi nu satisfac *P* este vidă. Pentru a stabili matricea corespunzătoare acestei corelații, să pornim de la matricea generală a corelațiilor între două scale pentru cuantificatori existențiali:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} C_3 & C_2 & 0C_1 & 0C_0 \\ C_3 & 0C_2 & C_1 & 0C_0 \end{bmatrix}$$(D), unde, pentru a fi respectată condiția de mai sus, $C_2 = \varnothing$. În acest caz, se obține matricea:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} C_3 & 0C_1 & 0C_0 \\ C_3 & C_1 & 0C_0 \end{bmatrix}$$(D). Dacă dezvoltăm această matrice după linia *S*, ajungem la:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} C_3 & 0(C_1 + C_0) \\ C_3 & C_1 \curlywedge 0C_0 \end{bmatrix}$$(D). Ținând seama de principiul de conservare a existenței, au loc relațiile $C_3+C_2 = S_1$; $C_1+C_0 = S_0$, astfel încât, propozițiile universal-afirmative sunt reprezentate prin matricea:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ S_1 & nS_0 \end{bmatrix}$$(D)

În general, propozițiile predicative sunt reprezentate prin matrice de tipul:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ \alpha S_1 & \beta S_0 \end{bmatrix}(D)$$

Coeficienții α și β iau următoarele valori:

Propoziția	A	E	I	O	A'	E'	I'	O'
α	1	0	1∧n	0∧n	n	n	n	n
β	n	n	n	n	1	0	1∧n	0∧n

Propozițiile „X'" sunt corespondentele propozițiilor predicative cu subiect negativ. De exemplu, A' = „Toți ~S sunt βP" Propozițiile pentru care α≠n și β≠n sunt *exclusive*. Bunăoară, propozițiile de forma „Numai *S* sunt *P*" au reprezentarea:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ 1 \wedge 0C_2 & 0S_0 \end{bmatrix}(D)$$

De exemplu, propoziția „Unele animale acvatice nu sunt pești" are reprezentarea:

$$\begin{matrix} animale\ acvatice \\ pești \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ 0 \wedge nC_2 & nS_0 \end{bmatrix}(D)$$

Cu ajutorul matricelor pot fi reprezentate și propozițiile compuse care conțin cuantificatori. Forma generală a unei asemenea propoziții cu subiectul *S* și predicatul *P* este:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ \alpha Q_1 \wedge \overline{\alpha}\,\overline{Q_1} & \beta Q_0 \wedge \overline{\beta}\,\overline{Q_0} \end{bmatrix}(D)$$

Afirmația se obține pentru $Q_1=1$ și $Q_0=1$. *Negația* este reprezentată prin matricea dată de relația $Q_1=\varnothing$ sau $Q_0=\varnothing$:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ \bar{\alpha}S_1 & nS_0 \end{bmatrix}(D) \vee \begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ nS_1 & \bar{\beta}S_0 \end{bmatrix}(D)$$

Negația coeficienților este dată de tabelul:

α	$\varnothing$	1	0	h	$1\wedge n$	$0\wedge n$	$C\wedge 0\bar{C}$	n
$\bar{\alpha}$	n	$0\wedge n$	$1\wedge n$	$C\wedge 0\bar{C}$	0	1	h	$\varnothing$

Putem calcula negațiile propozițiilor de predicație. De pildă, negația unei propoziții universal-afirmative este o propoziție particular-negativă:

$$\sim \begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ S_1 & nS_0 \end{bmatrix}(D) = \begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ (0\wedge n)S_1 & nS_0 \end{bmatrix}(D) \text{ v } \begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ nS_1 & \bar{n}S_0 \end{bmatrix}(D) = \begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ (0\wedge C)S_1 & nS_0 \end{bmatrix}(D) \text{ v } \begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 \\ nS_1 \end{bmatrix}(D);$$

dacă *D* nu este vid, atunci S_1 nu este vid. Prin urmare, negația universal-afirmativei este: $\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0S_0 \\ 0\wedge C & nS_0 \end{bmatrix}(D)$.

În același fel, se calculează negațiile celorlalte propoziții de predicație:

Propoziția	**A**	**E**	**I**	**O**	**A'**	**E'**	**I'**	**O'**
Negația	O	I	E	I	O'	I'	E'	A'

Negația unei propoziții exclusive este o disjuncție de propoziții de predicație. Ca exemplu, să calculăm negația propoziției „Numai oamenii sunt raționali":

$$\sim \begin{matrix} om \\ rațional \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1 \wedge n)Q_1 \wedge 0\bar{Q}_1 & 0Q_0 \wedge (1 \wedge n)\bar{Q}_0 \end{bmatrix}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}(D) \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \wedge n \end{bmatrix}(D)$$

S-a obținut propoziția: „Nici un om nu este rațional sau unii non-oameni sunt raționali"

Propozițiile compuse cu două argumente, αS_1-P_1 și βS_0-P_0, sunt reprezentate prin matrice de forma:

$$\begin{matrix} S_1 \\ P_1 \\ S_2 \\ P_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} S_{11} & 0S_{10} \\ \alpha Q_1 \wedge \bar{\alpha}\bar{Q}_1 & nS_{10} \\ nS_{11} & nS_{10} \\ nS_{11} & nS_{10} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} nS_{01} & nS_{00} \\ nS_{01} & nS_{00} \\ S_{01} & 0S_{00} \\ \beta Q_0 \wedge \bar{\beta}\bar{Q}_0 & nS_{00} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} C_3 & C_2 & 0C_1 & 0C_0 \\ \alpha_2 Q_1 \wedge \overline{\alpha_2}\bar{Q}_1 & \alpha_3 Q_1 \wedge \overline{\alpha_3}\bar{Q}_1 & nC_1 & nC_0 \\ C_3 & 0C_2 & C_1 & 0C_0 \\ \beta_1 Q_0 \wedge \overline{\beta_1}\bar{Q}_0 & nC_2 & \beta_3 Q_0 \wedge \overline{\beta_3}\bar{Q}_0 & nC_0 \end{bmatrix}(D)$$

unde $\alpha_i = \alpha$ pentru $C_i = \varnothing$ și $\alpha_i = g(\alpha)$ pentru $C_i = 1$. De asemenea, trebuie să ținem seama de principiile de conservare a existenței, (RE), și informației, (RI) și de principiul universului nevid, (RU):

$$\text{RU:} \begin{cases} S_{11} + S_{10} = 1 \\ S_{01} + S_{00} = 1 \\ C_3 + C_2 + C_1 + C_0 = 1 \end{cases}$$

$$\text{RE: } \begin{cases} C_3 + C_2 = S_{11} \\ C_3 + C_1 = S_{01} \\ C_1 + C_0 = S_{10} \\ C_2 + C_0 = S_{00} \end{cases}$$

RI:

$$\begin{cases} (\alpha_2 Q_1 \wedge \overline{\alpha_2}\overline{Q_1})C_3 \wedge (\alpha_3 Q_1 \wedge \overline{\alpha_3}\overline{Q_1})C_2 = (\alpha Q_1 \wedge \overline{\alpha}\overline{Q_1})S_{11} \\ (\beta_1 Q_0 \wedge \overline{\beta_1}\overline{Q_0})C_3 \wedge (\beta_3 Q_0 \wedge \overline{\beta_3}\overline{Q_0})C_1 = (\beta Q_0 \wedge \overline{\beta}\overline{Q_0})S_{01} \end{cases}$$

În cazul *conjuncției*, Q-cuantificatorii trebuie să respecte condițiile $Q_1Q_0 = 1$ și $\overline{Q_1} + \overline{Q_0} = \varnothing$. Soluția acestor ecuații este $Q_1 = Q_0 = 1$, de unde rezultă că matricea conjuncției este produsul matricelor conjunctelor. Pentru disjuncție, condițiile care trebuie respectate sunt: $Q_1+Q_0 = 1$; $\overline{Q_1Q_0} = \varnothing$. Implicația derivă din relațiile $\overline{Q_1} + Q_0 = 1$; $Q_1\overline{Q_0} = \varnothing$. Iată matricea corespunzătoare implicației, $(\alpha S_1 - P_1) \supset (\beta S_0 - P_0)$:

$$\begin{array}{c} \\ S_1 \\ P_1 \\ S_0 \\ P_0 \end{array} \begin{bmatrix} C_3 & C_2 & 0C_1 & 0C_0 \\ \alpha_2 Q_1 \wedge \overline{\alpha_2}\overline{Q_1} & \alpha_3 Q_1 \wedge \overline{\alpha_3}\overline{Q_1} & nC_1 & nC_0 \\ C_3 & 0C_2 & C_1 & 0C_0 \\ \beta_1 Q_1 \wedge n\overline{Q_1} & nC_2 & \beta_3 Q_1 \wedge n\overline{Q_1} & nC_0 \end{bmatrix} \text{(D)}$$

Pentru a calcula matricea corespunzătoare unei propoziții cuantificate compuse, se calculează produsul matricelor componentelor și apoi se ține seama de relațiile dintre Q-cuantificatori. De exemplu, să stabilim matricea corespunzătoare propoziției A = „Dacă toate balenele sunt mamifere, atunci unele animale acvatice sunt mamifere"

$$\begin{matrix} balene \\ animale\ acvatice \\ mamifere \end{matrix}\begin{bmatrix} S_{11} & 0S_{10} \\ nS_{11} & nS_{10} \\ Q_1 \wedge (0 \wedge n)\bar{Q}_1 & nS_{10} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} nS_{01} & nS_{00} \\ S_{01} & 0S_{00} \\ (1 \wedge n)Q_0 \wedge 0\bar{Q}_0 & nS_{00} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} C_3 & C_2 & 0C_1 & 0C_0 \\ C_3 & 0C_2 & C_1 & 0C_0 \\ Q_1Q_0 \wedge h\overline{Q_1}Q_0 \wedge 0\bar{Q}_1\overline{Q_0} & Q_1 \wedge (0 \wedge n)_3\bar{Q}_1 & (1 \wedge n)_3Q_0 \wedge 0\bar{Q}_0 & nC_0 \end{bmatrix}$$

Se constată că $\overline{C3} = Q_1\bar{Q}_0$. Dacă substituim în matricea de mai sus, se obține:

$$\begin{bmatrix} C_3 & C_2 & 0C_1 & 0C_0 \\ C_3 & 0C_2 & C_1 & 0C_0 \\ nC_3 & nC_3 \wedge \overline{C_3} & nC_3 \wedge 0\overline{C_3} & nC_0 \end{bmatrix}$$

Dacă $C_3 = 1$, atunci se obține matricea nedeterminată, adică propoziția dată este tautologie, iar dacă $C_3 = \varnothing$, atunci matricea corespunzătoare este:

$$\begin{bmatrix} C_2 & 0C_1 & 0C_0 \\ 0C_2 & C_1 & 0C_0 \\ C_2 & 0C_1 & nC_0 \end{bmatrix}$$

Cu alte cuvinte, propoziția *A* este tautologie dacă există balene care sunt animale acvatice, ceea ce este cazul. În situația în care nu ar exista balene care să fie animale acvatice, pentru ca *A* să fie adevărată, ar trebui ca nici un animal acvatic să nu fie mamifer.

4. Aplicații ale logicii corelațiilor

4.1. *Decizia asupra valorii logice a propozițiilor*

Pentru a decide asupra valorii logice a unei propoziții, se procedează astfel:

a) se construieşte matricea corespunzătoare propoziției date;

b) se calculează condițiile de adevăr sau de falsitate ale propoziției;

c) se decide astfel:

în cazul în care condițiile de falsitate încalcă principiile de conservare, atunci propoziția este tautologie;

în cazul în care condițiile de adevăr încalcă principiile de conservare, atunci propoziția este contradicție;

- în alte cazuri, propoziția dată este factuală.

Drept exemplu, să calculăm condițiile de adevăr ale propoziției: E = „Dacă toate pătratele au laturile egale, atunci nici un triunghi nu este pătrat":

$$\begin{matrix}\text{pătrat}\\ \text{polig. cu lat. egale}\\ \text{triunghi}\end{matrix}\begin{bmatrix} S_{11} & 0S_{10} \\ Q_1 \wedge (0 \wedge n)\bar{Q}_1 & nS_{10} \\ nS_{11} & nS_{10} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0Q_0 \wedge (1 \wedge n)\bar{Q}_0 & nS_{00} \\ nS_{01} & nS_{00} \\ S_{01} & 0S_{00} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_0 C_3 & C_2 & 0Q_0 C_1 & 0C_0 \\ (Q_1 \wedge g_2(0 \wedge n)\bar{Q}_1)C_3 & (Q_1 \wedge g_3(0 \wedge n)\bar{Q}_1)C_2 & nC_1 & nC_0 \\ C_3 & 0C_2 & C_1 & 0C_0 \end{bmatrix}$$

Propoziția dată este falsă în condițiile în care Q_1=1 şi Q_0=∅:

$$\begin{bmatrix} 1 & C_2 & 0C_0 \\ 1 & C_2 & nC_0 \\ 1 & 0C_2 & 0C_0 \end{bmatrix} (D)$$

Am obținut condițiile de falsitate ale propoziției date:

„Există triunghiuri" şi
„Toate pătratele au laturile egale" şi
„Toate triunghiurile sunt pătrate" şi
„Toate triunghiurile au laturile egale"

Pentru ca propoziția dată să fie adevărată, este suficient ca, cel puțin una dintre condițiile menționate să nu aibă loc. De exemplu, dacă unele triunghiuri nu au laturile egale, atunci propoziția respectivă este adevărată.

4.2. *Calculul consecințelor (condițiilor necesare) propozițiilor*

Pentru a stabili consecința unei propoziții, $<S_1, S_2, S_n>$, pentru sistemul $<S_i, S_j>$ se procedează în felul următor:

a) se calculează matricea corespunzătoare propoziției date;

b) se detaşează liniile S_i şi S_j din matricea propoziției date;

c) se dezvoltă matricea $<S_i, S_j>$ după una dintre linii;

d) se interpretează matricea $<S_i, S_j>$, obținându-se consecința dorită.

Fie, bunăoară, propoziția E = „Unele triunghiuri au unghiuri drepte şi nici un pătrat nu este triunghi" relativ la scalele <pătrat, poligon cu unghiuri drepte>. Construim matricea corespunzătoare propoziției *E*:

$$\begin{matrix} triunghi \\ pătrat \\ poligon\ cu\ unghiuri\ drepte \end{matrix} \begin{bmatrix} C_2 & 0C_1 & 0C_0 \\ 0C_2 & C_1 & 0C_0 \\ (1 \wedge n)C_2 & nC_1 & nC_0 \end{bmatrix} (D)$$

Separăm liniile <pătrat, poligon cu unghiuri drepte> şi dezvoltăm după linia *pătrat*:

$$\begin{matrix} & \textit{pătrat} \\ \textit{poligon cu unghiuri drepte} & \end{matrix} \begin{bmatrix} C_1 & 0(C_2 + C_0) \\ nC_1 & (1 \wedge n)C_2 \wedge nC_0 \end{bmatrix} (D)$$

Pentru a obține o consecință determinată, este necesar ca $C_2 = 1$, adică, trebuie să existe triunghiuri. În ipoteza că există triunghiuri, condiția necesară căutată este „Unele non-pătrate au unghiuri drepte"

4.3. *Calculul concluziei unui sistem de n propoziții*

Pentru orice sistem finit de propoziții se poate calcula matricea concluziei efectuând produsul matricelor corespunzătoare premiselor date. De exemplu, să calculăm concluzia propozițiilor: „Un singur număr prim este par", „Toate numerele prime mai mari decât zece nu sunt pare":

$$\begin{matrix} \textit{număr prim} \\ \textit{număr par} \\ \textit{număr mai mare decât zece} \end{matrix} \begin{bmatrix} S_{11} & 0S_{10} \\ 1.1 \wedge 0k & nS_{10} \\ nS_{11} & nS_{10} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} S_{111} & 0S_{110} & 0S_{10} \\ 0S_{111} & nS_{110} & nS_{10} \\ S_{111} & 0S_{110} & nS_{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0C_1 & 0S_{10} \\ 0C_2 & g(1.1 \wedge 0k)C_1 & nS_{10} \\ C_2 & 0C_1 & nS_{10} \end{bmatrix}$$

Concluzia trebuie să respecte principiile de conservare:

RE: $C_2 + C_1 = S_{11}$

RI: $0C_2 + g(1.1 \wedge 0k)C_1 = (1.1 \wedge 0k)S_{11}$

Detaşând matricea <număr par, număr mai mare decât 10>, ajungem la concluzia:

$$\begin{matrix} & \textit{număr par} \\ \textit{nr. mai mare de zece} & \end{matrix}\begin{bmatrix} 0C_2 \wedge nC_1 & (1 + C_{01}) \wedge 0(k_1 \wedge C_{00}) \\ Z_1 & 0Z_0 \end{bmatrix}$$

Prin urmare, din cele două premise rezultă concluzia „Cel puțin un număr mai mic decât zece este par"

4.4. *Decizia privind corectitudinea raționamentelor*

Condițiile în care un raționament, $\{P_1, \ldots, P_n\}|$-Q, este corect, sunt determinate astfel:

a) se calculează matricea propoziției „P_1& ...&P_n&~Q";

b) dacă această matrice nu respectă principiile de conservare, atunci raționamentul dat este corect; în alt caz, raționamentul nu este corect.

Drept exemplu, să verificăm dacă raționamentul „Toate planetele se rotesc în jurul Soarelui |- Toate corpurile care se rotesc în jurul Soarelui sunt planete" este corect. Pentru aceasta, calculăm matricea corespunzătoare propoziției „Toate planetele se rotesc în jurul Soarelui şi unele corpuri care se rotesc în jurul Soarelui nu sunt planete":

$$\begin{matrix} & \text{planete} \\ \text{se rotesc în jurul Soarelui} & \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ S_1 & nS_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \wedge n & nP_0 \\ 1 & 0P_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} C_3 & 0 & 0C_0 \\ C_3 & 1 & 0C_0 \end{bmatrix}$$

Regulile de conservare sunt:

RE: $C_3 = S_1$; $1 = P_1$; $1 = S_0$; $C_0 = P_0$;
RI: $C_3 \wedge 0 = 0 \wedge n$

Constatăm că regulile de conservare nu sunt încălcate, prin urmare, raționamentul dat nu este corect. Acest raționament ar fi corect dacă $C_1 = \varnothing$, când principiile de conservare ar fi violate. În acest caz, termenii „planetă" şi „corp care se roteşte în jurul Soarelui" ar fi sinonimi. De asemenea, s-ar obține raționament corect dacă P sau $\bar{S}$ ar fi termeni nuli.

4.5. *Calculul modurilor proprii*

Modurile de raționare ale căror condiții de corectitudine sunt date de principiile de conservare, se numesc *proprii*. Pentru ca un mod de raționare să genereze raționamente corecte, trebuie să respecte, pe lângă principiile de conservare, *principiul de determinare*, RD, conform căruia, un raționament este corect dacă are concluzia determinată. Astfel, modurile proprii reprezintă soluții la ecuațiile rezultate în urma aplicării următoarelor principii: *principiul universului nevid*, RU, potrivit căruia, există cel puțin o constantă individuală; *principiul conservării existenței*, RE; *principiul conservării informației*, RI şi *principiul de determinare*, RD. În scopul determinării modurilor proprii, se parcurg următoarele etape:

a) construirea matricei figurii de raționare avută în vedere;
b) stabilirea sistemelor de ecuații RU, RE, RI şi RD;
c) rezolvarea sistemelor de ecuații RU, RE, RI şi RD pentru a obține condițiile necesare de corectitudine;

d) dacă aceste condiții sunt şi suficiente, figura admite moduri proprii;

e) stabilirea modurilor proprii figurii respective, în funcție de condițiile de corectitudine.

4.5.1. Moduri proprii ale raționamentelor de existență

Raționamentele de existență au drept premise, propoziții de existență. Una dintre figurile raționamentelor de existență este:

$$S[x \quad 0C] = [S_1 \quad 0(C_0 + C)](\text{D})$$

Principiile de conservare generează ecuațiile:

RU: $S_1+C_0+C = 1$
RE: $S_1+C_0 = 1$
RI: $S_1+0C_0=x$

Pentru a obține o concluzie determinată, trebuie respectate relațiile:

RD: $S_1 = 1$ sau $C_0+C = 1$.

Rezolvând aceste sisteme de ecuații, ajungem la următoarele moduri de raționare:

Premisa	**Concluzia**
Toți *S* există.	Toți S există.
Numai *S* există.	Numai *S* există.
Unii *S* există.	Toți *S* există.
Nici un *S* nu există.	Numai ~S există.
Unii ~*S* există.	Toți ~S există.

Se remarcă modurile în care premisa este particulară şi concluzia este universală, dovadă că dogma că nu putem trage concluzie universală de la particular, nu este valabilă în orice situaţie. Este suficient să stabilim că un singur exemplar dintr-o categorie există pentru a fi siguri că există toate exemplare. Din premisa „Există un om care a ajuns pe Lună" rezultă „Există toţi oamenii care au ajuns pe Lună"

4.5.2. Moduri ale raţionamentelor de predicaţie

4.5.2.1. Raţionamente imediate categorice. Acestea sunt raţionamente cu propoziţii categorice care au o singură premisă.

4.5.2.1.1. Conversiunea. În urma conversiunii, subiectul şi predicatul unei propoziţii categorice îşi schimbă rolurile:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ \alpha S_1 & \beta S_0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} C_3 \wedge 0 C_1 & C_2 \wedge 0 C_0 \\ P_1 & 0P_0 \end{bmatrix} (D)$$

RU: $S_1+S_0 = 1$; $P_1+P_0=1$; $C_3+C_2+C_1+C_0=1$
RE: $C_3+C_2=S_1$; $C_1+C_0=S_0$; $C_3+C_1=P_1$; $C_2+C_0=P_0$
RI: $P_1C_3 \wedge 0P_0C_2=\alpha S_1$; $P_1C_1 \wedge 0P_0C_0=\beta S_0$
RD: $C_3 \wedge 0C_1 \neq nC$; $C_2 \wedge 0C_0 \neq nC$.

Rezolvând ecuaţiile de mai sus, obţinem următoarele moduri ale conversiunii:

Premisa	**A**	**E**	**I**	**O**	**A'**	**E'**	**I'**	**O'**
Concluzia	I, E'	E, I'	I	I'	O, A'	A, O'	O	O'

Universalele au câte două converse sau admit drept conversă o propoziţie exclusivă. Conversa particular-afirmativei este o particular afirmativă, iar a particular-

negativei este o particular-afirmativă cu subiect negativ. În cazul particularelor cu subiect negativ, conversa este particular-negativă cu subiect afirmativ pentru afirmativă şi cu subiect negativ pentru negativă. De exemplu, să calculăm conversa propoziției „Unii cetățeni nu au drept de vot":

$$\begin{matrix} cetățean \\ drept\ de\ vot \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0S_0 \\ 0 \wedge C & nS_0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} nP_1 & 1 \wedge 0C_0 \\ P_1 & 0 \end{bmatrix}(D)$$

Am obținut concluzia: „Unele persoane care nu au drept de vot sunt cetățeni"

4.5.2.1.2. *Obversiunea* constă în schimbarea calității predicatului: S-P |- S-~P. Matricea obversiunii este:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ \alpha S_1 & nS_0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} S \\ \bar{P} \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ C_0 \wedge 0C_1 & nS_0 \end{bmatrix}(D)$$

RU: $S_1+S_0 = 1$; $C_1+C_0+S_0 = 1$
RE: $C_1+C_0 = S_1$
RI: $\alpha S_1 = C_1 \wedge 0C_0$
RD: $C_0 \wedge 0C_1 \neq nC$

Prin rezolvarea ecuațiilor, se constată că obversa schimbă calitatea premisei, păstrând cantitatea:

Premisa	**A**	**E**	**I**	**O**	**A'**	**E'**	**I'**	**O'**
Concluzia	E	A	O	I	E'	A'	O'	I'

De exemplu, raționamentul „Nici un triunghi nu este patrulater |- Toate triunghiurile sunt non-patrulatere" este corect.

Modurile puse în evidență nu generează raționamente corecte decât în anumite condiții. De exemplu, conversiunea „SeP |- PeS" nu este corectă dacă *S* sau *P* sunt termeni nuli.

Astfel, raționamentul „Nici un om nu este marțian |- Nici un marțian nu este om" nu poate fi considerat corect, deoarece contrara concluziei nu este respinsă şi, cu ajutorul lui, am obține cunoştințe despre ceva ce nu există.

4.5.2.2. Calculul modurilor proprii silogistice. Silogismul este un raționament mediat cu două premise categorice, care au un predicat comun, numit *termen mediu*, M. Subiectul concluziei se numeşte *termen minor*, S, iar predicatul concluziei este *termenul major*, P, al silogismului. Premisa M-P este *majoră*, iar premisa S-M se numeşte *minoră*. După poziția termenilor M, P, S în premise, se disting patru figuri silogistice. Iată calculul modurilor proprii corespunzătoare acestor figuri:

4.5.2.2.1. Figura I: MαP; SβM/**S-P

$$\begin{matrix} M \\ P \\ S \end{matrix}\begin{bmatrix} M_1 & 0M_0 \\ \alpha_1 M_1 & \alpha_0 M_0 \\ nM_1 & nM_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1 S_1 & \beta_0 S_0 \\ nS_1 & nS_0 \\ S_1 & 0S_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1 \times g_1\beta_1)C_3 \wedge (0 \times g_3\beta_1)C_1 & (1 \times g_0\beta_0)C_2 \wedge (0 \times g_2\beta_0)C_0 \\ g_2\alpha_1 C_3 \wedge g_0\alpha_0 C_1 & g_3\alpha_1 C_2 \wedge g_1\alpha_0 C_0 \\ S_1 & 0S_0 \end{bmatrix}$$

RU: $M_1+M_0=1$; $S_1+S_0=1$; $C_3+C_2+C_1+C_0=1$
RE: $C_3+C_2= M_1$; $C_3+C_1= S_1$; $C_0+C_1= M_0$; $C_2+C_0= S_0$;

$$\text{RI:} \begin{cases} (1 \times g_1\beta_1)C_3 \wedge (0 \times g_3\beta_1)C_1 = \beta_1 S_1 \\ (1 \times g_0\beta_0)C_2 \wedge (0 \times g_2\beta_0)C_0 = \beta_0 S_0 \\ g_2\alpha_1 C_3 \wedge g_3\alpha_1 C_2 = \alpha_1 S_1 \\ g_0\alpha_0 C_1 \wedge g_1\alpha_0 C_0 = \alpha_0 S_0 \end{cases}$$

RD: $\begin{cases} g_2\alpha_1C_3 \wedge g_0\alpha_0C_1 \neq nC, sau, \\ g_3\alpha_1C_2 \wedge g_1\alpha_0C_0 \neq nC \end{cases}$

Regula de determinare este respectată în următoarele situații:

a) $\alpha_1 \in \{1, 0\}$ şi $C_3 = 1$, respectiv, $\beta_1 \in \{1, 1\wedge n\}$, sau $\alpha_1 \in \{1, 0, 1\wedge n, 0\wedge n\}$ şi $\beta_0 = 0$; condiții: *M* şi *S* sunt termeni nenuli.

b) $\alpha_0 \in \{1, 0\}$ şi $C_1 = 1$, respectiv, $\beta_1 \in \{0, 0\wedge n\}$, sau $\alpha 0 \in \{1, 0, 1\wedge n, 0\wedge n\}$ şi $\beta_0 = 1$; condiții: *S* şi ~M sunt nenuli.

c) $\alpha_1 \in \{1, 0\}$ şi $C_2 = 1$, respectiv, $\beta_0 \in \{1, 1\wedge n\}$, sau $\alpha_1 \in \{1, 0, 1\wedge n, 0\wedge n\}$ şi $\beta_1 = 0$; condiții: *M* şi ~S sunt nenuli.

d) $\alpha_0 \in \{1, 0\}$ şi $C_0 = 1$, respectiv, $\beta_0 \in \{0, 0\wedge n\}$, sau $\alpha_1 \in \{1, 0, 1\wedge n, 0\wedge n\}$ şi $\beta_1 = 1$; condiții: ~M şi ~S sunt nenuli.

Am obținut următorul tabel al modurilor proprii pentru figura I silogistică:

α_1	α_0	β_1	β_0	**Modul**	**Denumire**
1		1		AAA	Barbara
1		1∧n		AII	Darii
0		1		EAE	Celarent
0		1∧n		EIO	Ferio
1			0	AE'I	
0			0	EE'O	
1∧n			0	IE'I	

0∧n			0	OE'O
	1	0		A'EA
	1	0∧n		A'OI
	0	0		E'EE
	0	0∧n		E'OO
	1		1	A'A'I
	0		1	E'A'O
	1∧n		1	I'A'I
	0∧n		1	O'A'O
1			1	AA'A'
1			1∧n	AI'I'
0			1	EA'E'
0			1∧n	EI'O'
1		0		AEI'
0		0		EEO'
1∧n		0		IEI'
0∧n		0		OEO'
	1		0	A'E'A'
	1		0∧n	A'O'I'
	0		0	E'E'E'
	0		0∧n	E'O'O'
	1	1		A'AI'
	0	1		E'AO'
	1∧n	1		I'AI'
	0∧n	1		O'AO'

4.5.2.2.2. Figura a II-a: PαM; SβM/**S-P

$$\begin{matrix} M \\ P \\ S \end{matrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 P_1 & \alpha_0 P_0 \\ P_1 & 0P_0 \\ nP_1 & nP_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1 S_1 & \beta_0 S_0 \\ nS_1 & nS_0 \\ S_1 & 0S_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (g_2\alpha_1 \times g_1\beta_1)C_3 \wedge (g_0\alpha_0 \times g_3\beta_1)C_1 & (g_3\alpha_1 \times g_0\beta_0)C_2 \wedge (g_1\alpha_0 \times g_2\beta_0)C_0 \\ C_3 \wedge 0C_1 & C_2 \wedge 0C_0 \\ S_1 & 0S_0 \end{bmatrix}$$

Ecuațiile asociate matricei figurii a II-a silogistice sunt:

RU: $P_1+P_0 = 1$; $S_1+S_0 = 1$; $C_3+C_2+C_1+C_0 = 1$
RE: $C_3+C_2 = P_1$; $C_3+C_1 = S_1$; $C_0+C_2 = S_0$; $C_0+C_1 = P_0$

RI: $\begin{cases} (g_2\alpha_1 \times g_1\beta_1)C_3 \wedge (g_3\alpha_1 \times g_0\beta_0)C_2 = \alpha_1 P_1 \\ (g_2\alpha_1 \times g_1\beta_1)C_3 \wedge (g_0\alpha_0 \times g_3\beta_1)C_1 = \beta_1 S_1 \\ (g_3\alpha_1 \times g_0\beta_0)C_2 \wedge (g_1\alpha_0 \times g_2\beta_0)C_0 = \beta_0 S_0 \\ (g_0\alpha_0 \times g_3\beta_1)C_1 \wedge (g_1\alpha_0 \times g_2\beta_0)C_0 = \alpha_0 P_0 \end{cases}$

RD: $C_3 \wedge 0C_1 \neq nC$; $C_2 \wedge 0C_0 \neq nC$.

Soluțiile sistemelor de ecuații corespunzătoare figurii a II-a, conduc la următoarele moduri silogistice proprii:

α_1	α_0	β_1	β_0	**Modul**	**Denumire**
0			1	EA'I	
$0 \wedge n$			1	OA'I	
1			0	AE'I	
$1 \wedge n$			0	IE'I	
	0	1		E'AA	
	0	$1 \wedge n$		E'IO	
	1	0		A'EA	
	1	$0 \wedge n$		A'OO	
1		0		AEE	Camestres
1		$0 \wedge n$		AOO	Baroco
0		1		EAE	Cesare
0		$1 \wedge n$		EIO	Festino
	0		1	E'A'O	

	$0\wedge n$		1	O'A'O
	1		0	A'E'O
	$1\wedge n$		0	I'E'O
0		1		EAI'
$0\wedge n$		1		OAI'
1		0		AEI'
$1\wedge n$		0		IEI'
	0		1	E'A'A'
	0		$1\wedge n$	E'I'I'
	1		0	A'E'A'
	1		$0\wedge n$	A'O'I'
1			0	AE'E'
1			$0\wedge n$	AO'O'
0			1	EA'E'
0			$1\wedge n$	EI'O'
	0	1		E'AO'
	$0\wedge n$	1		O'AO'
	1	0		A'EO'
	$1\wedge n$	0		I'EO'

4.5.2.2.3. Figura a III-a: MαP; MβS/**S-P

Matricea asociată acestei figuri este:

$$\begin{matrix} M \\ P \\ S \end{matrix}\begin{bmatrix} M_1 & 0M_0 \\ \alpha_1 M_1 & \alpha_0 M_0 \\ nM_1 & nM_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_1 & 0M_0 \\ nM_1 & nM_0 \\ \beta_1 M_1 & \beta_0 M_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} C_3 \wedge 0C_1 & C_2 \wedge 0C_0 \\ g_2\alpha_1 C_3 \wedge g_0\alpha_0 C_1 & g_3\alpha_1 C_2 \wedge g_1\alpha_0 C_0 \\ S_1 & 0S_0 \end{bmatrix} (D)$$

RU: $M_1+M_0 = 1$; $S_1+S_0 = 1$; $C_3+C_2+C_1+C_0 = 1$;

RE: $C_3+C_2 = M_1$; $C_3+C_1 = S_1$; $C_0+C_2 = S_0$; $C_0+C_1 = M_0$;

$$\text{RI: } \begin{cases} C_3 \wedge 0 C_2 = \beta_1 M_1 \\ C_1 \wedge 0 C_0 = \beta_0 M_0 \\ g_2 \alpha_1 C_3 \wedge g_3 \alpha_1 C_2 = \alpha_1 M_1 \\ g_0 \alpha_0 C_1 \wedge g_1 \alpha_0 C_0 = \alpha_0 M_0 \end{cases}$$

$$\text{RD: } \begin{cases} g_2 \alpha_1 C_3 \wedge g_0 \alpha_0 C_1 \neq nC \\ g_3 \alpha_1 C_2 \wedge g_1 \alpha_0 C_0 \neq nC \end{cases}$$

Tabclul modurilor proprii ale figurii a III-a la care se ajunge rezolvând ecuațiile de mai sus, este:

α_1	α_0	β_1	β_0	**Modul**	**Denumire**
1		1		AAI	Darapti
1		1∧n		AII	Datisi
0		1		EAO	Felapton
0		1∧n		EIO	Ferison
1∧n		1		IAI	Disamis
0∧n		1		OAO	Bocardo
	1		1	A'A'I	
	1		1∧n	A'I'I	
	0		1	E'A'O	
	0		1∧n	E'I'O	
	1∧n		1	I'A'I	
	0∧n		1	O'A'O	
1		0		AEI'	
1		0∧n		AOI'	
0		0		EEO'	
0		0∧n		EOO'	
1∧n		0		IEI'	
0∧n		0		OEO'	

1	0	A'E'I'
1	0∧n	A'O'I'
0	0	E'E'O'
0	0∧n	E'O'O'
1∧n	0	I'E'I'
0∧n	0	O'E'O'

4.5.2.2.4. Figura a IV-a: PαM; MβS/**S-P

$$\begin{matrix} M \\ P \\ S \end{matrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 P_1 & \alpha_0 P_0 \\ P_1 & 0P_0 \\ nP_1 & nP_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_1 & 0M_0 \\ nM_1 & nM_0 \\ \beta_1 M_1 & \beta_0 M_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1 \times g_2\alpha_1)C_{31} \wedge (0 \times g_3\alpha_1)C_{21} \wedge (1 \times g_0\alpha_0)C_{11} \wedge (0 \times g_1\alpha_0)C_{01} \\ C_{31} \wedge C_{21} \wedge 0(C_{11} \wedge C_{01}) \\ S_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1 \times g_2\alpha_1)C_{30} \wedge (0 \times g_3\alpha_1)C_{20} \wedge (1 \times g_0\alpha_0)C_{10} \wedge (0 \times g_1\alpha_0)C_{00} \\ C_{30} \wedge C_{20} \wedge 0(C_{10} \wedge C_{00}) \\ 0S_0 \end{bmatrix}$$

RU: $P_1+P_0 = 1$; $M_1+M_0 = 1$;

$C_{31}+C_{30}+C_{21}+C_{20}+C_{11}+C_{10}+C_{01}+C_{00} = 1$;

RE: $C_{31}+C_{30}+C_{21}+C_{20} = P_1$; $C_{31}+C_{30}+C_{11}+C_{10} = M_1$; $C_{01}+C_{00}+C_{21}+C_{20} = M_0$; $C_{01}+C_{00}+C_{21}+C_{10} = P_0$;

RI:

$$\begin{cases} (1 \times g_2\alpha_1)C_{31} \wedge (0 \times g_3\alpha_1)C_{21} \wedge (1 \times g_2\alpha_1)C_{30} \wedge (0 \times g_3\alpha_1)C_{20} = \alpha_1 P_1 \\ (1 \times g_0\alpha_0)C_{11} \wedge (0 \times g_1\alpha_0)C_{01} \wedge (1 \times g_0\alpha_0)C_{10} \wedge (0 \times g_1\alpha_0)C_{00} = \alpha_0 P_0 \\ C_{31} \wedge C_{30} \wedge 0(C_{11} \wedge C_{01}) = \beta_1 M_1 \\ C_{01} \wedge C_{21} \wedge 0(C_{01} \wedge C_{20}) = \beta_0 M_0 \end{cases}$$

RD: $\begin{cases} C_{31} \wedge C_{21} \wedge 0(C_{11} \wedge C_{01}) \neq nC \\ C_{30} \wedge C_{20} \wedge 0(C_{10} \wedge C_{00}) \neq nC \end{cases}$

Prin rezolvarea ecuațiilor figurii a IV-a silogistice ajungem la următorul tabel al modurilor proprii:

α_1	α_0	β_1	β_0	**Modul**	**Denumire**
1		1		AAI	Bramantip
1∧n		1		IAI	Dimaris
	0	1		E'AI	
	0	1∧n		E'II	
0			1	EA'I	
0∧n			1	OA'I	
	1		1	A'A'I	
	1		1∧n	A'I'I	
0		1		EAO	Fesapo
0		1∧n		EIO	Fresison
	1	1		A'AO	
	1∧n	1		I'AO	
1			1	AA'O	
1			1∧n	AI'O	
	0		1	E'A'O	
	0∧n		1	O'A'O	
1		0		AEI'	
1∧n		0		IEI'	
	0	0		E'EI'	
	0	0∧n		E'OI'	
0			0	EE'I'	
0∧n			0	IE'I'	
	1		0	A'E'I'	
	1		0∧n	A'O'I'	
0		0		EEO'	
0		0∧n		EOO'	
	1	0		A'EO'	
	1∧n	0		I'EO'	
1			0	AE'O'	
1			0∧n	AO'O'	
	0		0	E'E'O'	

0∧n	0	O'E'O'

Modurile recunoscute valide în mod tradiţional se dovedesc a fi şi moduri proprii ale figurilor silogistice, cu excepţia modului *Camenes* din figura a 4-a, AEE-4. Silogismele din acest mod nu sunt corecte decât dacă, la condiţiile derivate din principiile de conservare, se adaugă cerinţa suplimentară ca termenul minor să nu fie nul. De pildă, silogismul:

Toţi logicienii sunt oameni.
Nici un om nu este marţian.
**Nici un marţian nu este logician.

nu este corect deoarece nu se poate respinge contrara concluziei: „Toţi marţienii sunt logicieni", prin urmare, nu este respectată regula de determinare. În schimb, silogismul:

Toţi logicienii sunt oameni.
Nici un om nu este patruped.
**Nici un patruped nu este logician.

este corect în măsura în care există animale cu patru picioare.

Dacă se compară tabelele modurilor proprii înfăţişate aici cu tabelul modurilor valide la care ajunge modelul *Menne-Ţuţugan* al silogisticii, (Didilescu I., Botezatu P., *1976*, p. 365), se constată unele diferenţe. Unele dintre modelele declarate valide în cadrul modelului amintit necesită condiţii suplimentare de corectitudine, aşa încât, nu pot fi admise ca moduri proprii. De exemplu, în cazul modului AE'A-3, concluzia este determinată numai dacă minorul nu este nul. Modul AAO'-2 generează silogisme corecte numai dacă termenul mediu nu este universal. Silogismele din modul AAE'-4 sunt corecte doar pentru un minor neuniversal etc.

În general, nu există moduri *valide*, adică nu există moduri pentru care toate silogismele din cadrul lor să fie corecte, ci, pentru fiecare mod, trebuie avute în vedere condițiile de corectitudine. Nu există silogisme absolute, ci numai silogisme condiționate. Chiar și *Barbara*, considerat neîndoielnic valid, presupune condiția ca mediul sau minorul să fie un termen nenul. De exemplu, silogismul *Barbara*:

Toți oamenii sunt muritori.
Utnapiști este om.
**Utnapiști este muritor.

nu este corect deoarece contrara concluziei, „Utnapiști nu este muritor", este la fel de adevărată, iar pe baza unui raționament precum cel anterior, nu se poate respinge *Epopeea lui Ghilgameș*. La fel, nu se poate respinge că Isus Hristos ar fi murit pe cruce, pornind de la premisa că „Dumnezeu este nemuritor"

Pe de altă parte, orice mod conține silogisme corecte. De pildă, fie modul IIO-1, care după regulile silogisticii clasice, este nevalid, astfel că silogismele din cadrul său ar trebui să fie incorecte. Cu toate acestea, dacă *P* este supraordinat lui *M* și *S* este în raport de încrucișare cu *M*, se obțin silogisme corecte. Bunăoară, silogismul:

Unii oameni sunt logicieni.
Unele animale bipede sunt oameni.
**Unele animale bipede nu sunt logicieni.

este corect în măsura în care numai oamenii sunt logicieni și există animale bipede care nu sunt oameni, cum ar fi păsările.

4.5.2.3. Moduri proprii ale figurilor *soritului*

Soritul este un raționament care are cel puțin trei premise categorice, iar între aceste premise există termeni

comuni. Forma soritului este: $\{S\alpha_1M_1,\ M_1\alpha_2M_2,\ \ldots\ M_{n-1}\alpha_nM_n,\ M_n\alpha_{n+1}P\}|\text{-}S\beta P$. Numărul figurilor soritului este în funcţie de numărul premiselor; la *n* premise corespund 2^n figuri. Dintre acestea, au fost studiate, mai ales, figurile aparţinând *soritului aristotelic*, în care subiectul concluziei este subiect în prima premisă şi predicatul concluziei este predicat în ultima premisă şi cele ale *soritului goclenian*, când predicatul concluziei este predicat în prima premisă, iar subiectul concluziei este subiect în ultima premisă a soritului. Drept exemplu, să stabilim modurile proprii ale soritului goclenian cu trei premise. Matricea corespunzătoare unui asemenea sorit este următoarea:

$$\begin{matrix} M \\ P \\ L \\ S \end{matrix}\begin{bmatrix} M_1 & 0M_0 \\ \alpha_1M_1 & \alpha_0M_0 \\ nM_1 & nM_0 \\ nM_1 & nM_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1L_1 & \beta_0L_0 \\ nL_1 & nL_0 \\ L_1 & 0L_0 \\ nL_1 & nL_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} nS_1 & nS_0 \\ nS_1 & nS_0 \\ \gamma_1S_1 & \gamma_0S_0 \\ S_1 & 0S_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1 \times g_{632}\beta_1)C_7 \wedge (1 \times g_{410}\beta_0)C_5 \wedge (0 \times g_{762}\beta_1)C_3 \wedge (0 \times g_{540}\beta_0)C_1 \\ g_{654}\alpha_1C_7 \wedge g_{764}\alpha_1C_5 \wedge g_{210}\alpha_0C_3 \wedge g_{320}\alpha_0C_1 \\ (1 \times g_{531}\gamma_1)C_7 \wedge (0 \times g_{731}\gamma_1)C_5 \wedge (1 \times g_{751}\gamma_1)C_3 \wedge (0 \times g_{753}\gamma_1)C_1 \\ S_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1 \times g_{732}\beta_1)C_6 \wedge (1 \times g_{510}\beta_0)C_4 \wedge (0 \times g_{763}\beta_1)C_2 \wedge (0 \times g_{541}\beta_0)C_0 \\ g_{754}\alpha_1C_6 \wedge g_{765}\alpha_1C_4 \wedge g_{310}\alpha_0C_2 \wedge g_{321}\alpha_0C_0 \\ (1 \times g_{420}\gamma_0)C_6 \wedge (0 \times g_{620}\gamma_0)C_4 \wedge (1 \times g_{640}\gamma_0)C_2 \wedge (0 \times g_{642}\gamma_0)C_0 \\ 0S_0 \end{bmatrix}$$

Principiile de conservare conduc la următoarele sisteme de ecuaţii:

RU: $M_1+M_0=1$; $L_1+L_0=1$; $S_1+S_0=1$; $\Sigma C_i=1$;

$$\text{RE:}\begin{cases} C_7 + C_5 + C_3 + C_1 = S_1 \\ C_6 + C_4 + C_2 + C_0 = S_0 \\ C_7 + C_5 + C_6 + C_4 = M_1 \\ C_3 + C_2 + C_1 + C_0 = M_0 \\ C_7 + C_6 + C_3 + C_2 = L_1 \\ C_5 + C_4 + C_1 + C_0 = L_0 \end{cases}$$

RI:

$$\begin{cases} (1 \times g_{632}\beta_1)C_7 \wedge (0 \times g_{762}\beta_1)C_3 \wedge (1 \times g_{732}\beta_1)C_6 \wedge (0 \times g_{763}\beta_1)C_2 = \beta_1 L_1 \\ (1 \times g_{410}\beta_0)C_5 \wedge (0 \times g_{540}\beta_0)C_1 \wedge (1 \times g_{510}\beta_0)C_4 \wedge (0 \times g_{541}\beta_0)C_0 = \beta_0 L_0 \\ (1 \times g_{632}\beta_1)C_7 \wedge (1 \times g_{410}\beta_0)C_5 \wedge (1 \times g_{732}\beta_1)C_6 \wedge (1 \times g_{510}\beta_0)C_4 = M_1 \\ (0 \times g_{762}\beta_1)C_3 \wedge (0 \times g_{540}\beta_0)C_1 \wedge (0 \times g_{763}\beta_1)C_2 \wedge (0 \times g_{541}\beta_0)C_0 = 0M_0 \\ g_{654}\alpha_1 C_7 \wedge g_{764}\alpha_1 C_5 \wedge g_{754}\alpha_1 C_6 \wedge g_{765}\alpha_1 C_4 = \alpha_1 M_1 \\ g_{210}\alpha_0 C_3 \wedge g_{320}\alpha_0 C_1 \wedge g_{310}\alpha_0 C_2 \wedge g_{321}\alpha_0 C_0 = \alpha_0 M_0 \\ (1 \times g_{531}\gamma_1)C_7 \wedge (0 \times g_{731}\gamma_1)C_5 \wedge (1 \times g_{751}\gamma_1)C_3 \wedge (0 \times g_{753}\gamma_1)C_1 = \gamma_1 S_1 \\ (1 \times g_{420}\gamma_0)C_6 \wedge (0 \times g_{620}\gamma_0)C_4 \wedge (1 \times g_{640}\gamma_0)C_2 \wedge (0 \times g_{642}\gamma_0)C_0 = \gamma_0 S_0 \\ (1 \times g_{531}\gamma_1)C_7 \wedge (1 \times g_{751}\gamma_1)C_3 \wedge (1 \times g_{420}\gamma_0)C_6 \wedge (1 \times g_{640}\gamma_0)C_2 = L_1 \\ (0 \times g_{731}\gamma_1)C_5 \wedge (0 \times g_{753}\gamma_1)C_1 \wedge (0 \times g_{620}\gamma_0)C_4 \wedge\wedge (0 \times g_{642}\gamma_0)C_0 = 0L_0 \end{cases}$$

RD:

$$\begin{cases} g_{654}\alpha_1 C_7 \wedge g_{764}\alpha_1 C_5 \wedge g_{210}\alpha_0 C_3 \wedge g_{320}\alpha_0 C_1 \neq \text{nC} \\ g_{754}\alpha_1 C_6 \wedge g_{765}\alpha_1 C_4 \wedge g_{310}\alpha_0 C_2 \wedge g_{321}\alpha_0 C_0 \neq \text{nC} \end{cases}$$

În urma rezolvării ecuațiilor de mai sus, se obțin următoarele moduri proprii ale soritului goclenian cu trei premise:

4.5.2.3.1. Sorite care au concluzia universală

α_1	α_0	β_1	β_0	γ_1	γ_0	**Modul**
1		1		1		AAAA
1			1	0		AA'EA
	1	0		1		A'EAA
	1		0	0		A'E'EA
0		1		1		EAAE

0			1	0		EA'EE
	0	0		1		E'EAE
	0		0	0		E'E'EE
1		1			1	AAA'A'
1			1		0	AA'E'A'
	1	0			1	A'EA'A'
	1	0			0	A'E'E'A'
0		1			1	EAA'E'
0			1		0	EA'E'E'
	0	0			1	E'EA'E'
	0	0			0	E'E'E'E'

4.5.2.3.2. Sorite care au concluzia particulară cu subiect pozitiv

α_1	α_0	β_1	β_0	γ_1	γ_0	**Modul**
1		1			0	AAE'I
1		1∧n			0	AÆ'I
1		1		1		AAAI
1			0		0	AE'E'I
1		1			0	AAE'I
1			1		1	AA'A'I
1			1∧n		1	AI'A'I
1			1	0		AA'EI
1		0		1		AEAI
1			1		1	AA'A'I
	1	0			0	A'EE'I
	1	0∧n			0	A'OE'I
	1	0		1		A'EAI
	1		1		0	A'A'E'I
	1	0			0	A'EE'I
	1		0		1	A'E'E'I
	1		0∧n		1	A'O'A'I

	1		0	0		A'E'EI
	1	1			1	A'AA'I
	1		0		1	A'E'A'I
0		1			0	EAE'O
0		1∧n			0	EIE'O
0		1		1		EAAO
0			0		0	EE'E'O
0		1			0	EAE'O
0			1		1	EA'A'O
0			1∧n		1	EI'A'O
0			1	0		EA'EO
0		0		1		EEAO
0			1		1	EA'A'O
	0	0			0	E'EE'I
	0	0∧n			0	E'OE'I
	0	0		1		E'EAI
	0		1		0	E'A'E'I
	0	0			0	E'EE'I
	0		0		1	E'E'E'I
	0		0∧n		1	E'O'A'I
	0		0	0		E'E'EI
	0	1			1	E'AA'I
	0		0		1	E'E'A'I

4.5.2.3.3. Sorite care au concluzia particulară cu subiect negativ

α_1	α_0	β_1	β_0	γ_1	γ_0	**Modul**
1		0		0		AEEI'
1		0∧n		0		AOEI'
1		0			1	AEA'I'
1			1	1		AA'AI'
1		0		0		AEEI'
1			0	1		AE'AI'
1			0∧n	1		AO'AI'

1			0		0	AE'E'I'
1		1		1		AAAI'
1			0	1		AE'AI'
	1	0		0		A'EEI'
	1	0∧n		0		A'OEI'
	1	0			1	A'EA'I'
	1		1	1		A'A'AI'
	1	0		0		A'EEI'
	1		0	1		A'E'AI'
	1		0∧n	1		A'O'AI'
	1		0		0	A'E'E'I'
	1	1		1		A'AAI'
	1		0	1		A'E'AI'
0		0		0		EEEO'
0		0∧n		0		EOEO'
0		0			1	EEA'O'
0			1	1		EA'AO'
0		0		0		EEEO'
0			0	1		EE'AO'
0			0∧n	1		EO'AO'
0			0		0	EE'E'O'
0		1		1		EAAO'
0			0	1		EE'AO'
	0	0		0		E'EEO'
	0	0∧n		0		E'OEO'
	0	0			1	E'EA'O'
	0		1	1		E'A'AO'
	0	0		0		E'EEO'
	0		0	1		E'E'AO'
	0		0∧n	1		E'O'AO'
	0		0		0	E'E'E'O'
	0	1		1		E'AAO'
	0		0	1		E'E'AO'

4.5.3. Moduri proprii ale raționamentelor cu propoziții cuantificate numeric

Propozițiile care au cuantificatori numerici pot fi, după cantitate, universale şi particulare. Spre deosebire de propozițiile cuantificate existențial, care acceptă un singur tip de particulară, în cazul celor cuantificate numeric există numeroase propoziții particulare. Propozițiile numerice universale au forma: „Toți cei *sS* sunt *P*", unde *s* este numărul tuturor elementelor clasei subiectului. Între particulare se numără: „Un *S* este *P*", „Doi *S* sunt *P*", ..., „*kS* sunt *P*", unde k<s. La acestea se adaugă propoziții al căror cuantificator este mai mult sau mai puțin nedeterminat: „Cel puțin *kS* sunt *P*", „Cel mult *kS* sunt *P*", „Între *k* şi *m* dintre cei care sunt *S* sunt *P*" etc.

Negația propoziției „*kS* sunt *P*" este „Mai puțin decât *k* sau mai mult decât *k* dintre cei care sunt *S* sunt *P*", respectiv, „Un număr diferit de *k* dintre cei care sunt *S* sunt *P*" Negația universalei este o particulară: „Mai puțin decât *sS* sunt *P*" Observăm că, prin negarea propozițiilor cuantificate numeric nu se obțin propoziții negative. Universal-negativa, „Nici unul dintre cei *sS* nu sunt *P*" poate avea şi o formă afirmativă: „Zero *S* sunt *P*" Particularele negative au forme precum: „*kS* nu sunt *P*" Acestea nu sunt negații ale universalei afirmative.

Propoziția „*kS* sunt *P*" are următoarea reprezentare matriceală:

$$\begin{matrix} S \\ P \end{matrix}\begin{bmatrix} S_1 & 0S_0 \\ k \wedge 0C & nS_0 \end{bmatrix}(\mathrm{D})$$

În cazul în care $C = \varnothing$, se obține propoziția universal-afirmativă cuantificată numeric. Raționamentele cu propoziții cuantificate numeric pot fi, la rândul lor, imediate sau

mediate. Modurile acestor raționamente sunt în număr nelimitat, așa încât nu pot fi enumerate în totalitate. Iată câteva exemple de conversiuni ale propozițiilor cuantificate numeric:

4.5.3.1. Conversiuni ale propozițiilor cuantificate numeric

4.5.3.1.1. Conversiuni care au concluzia cu subiect pozitiv.

4.5.3.1.1.1. Conversiuni care au concluzia universală:

Nici unul dintre cei $s_0\bar{S}$ nu este P.
**Toți p_1P sunt S.

Nici unul dintre cei s_1S nu este P.
**Nici unul dintre cei p_1P nu este S.

4.5.3.1.1.2. Conversiuni care au concluzia particulară:

$s_{11}S$ sunt P.
**$s_{11}P$ sunt S.

Toți s_1S sunt P.
**s_1P sunt S.

$s_{01}\bar{S}$ sunt P.
**$s_{01}P$ nu sunt S.

Toți $s_0\bar{S}$ sunt P.
s_0P nu sunt S.

4.5.3.1.2. Conversiuni care au concluzia cu subiect negativ

4.5.3.1.2.1. Conversiuni care au concluzia universală:

Toți $s_0\bar{S}$ sunt P.
**Toți $p_0\bar{P}$ sunt *S*.

Toți s_1S sunt *P*.
**Nici unul dintre cei $p_0\bar{P}$ nu este *S*.

4.5.3.1.2. Conversiuni care au concluzia particulară:

$s_{10}S$ nu sunt *P*.
**$s_{10}\bar{P}$ sunt *S*.

Nici unul dintre cei s_1S nu este *P*.
**$s_1\bar{P}$ sunt *S*.

$s_{00}\bar{S}$ nu sunt *P*.
**$s_{00}\bar{P}$ nu sunt *S*.

Nici unul dintre cei $s_0\bar{S}$ nu este *P*.
$s_0\bar{P}$ nu sunt *S*.

4.5.3.2. Raționamente mediate cu propoziții cuantificate numeric

Dintre raționamentele mediate cu propoziții cuantificate numeric, ne oprim doar asupra silogismelor (raționamente cu două premise şi un termen mediu) de Figura I (M-P, S-M/**S-P). Asemenea raționamente sunt reprezentate matriceal astfel:

$$\begin{matrix} M \\ P \\ S \end{matrix}\begin{bmatrix} M_1 & 0M_0 \\ m_{11}\curlywedge 0m_{10} & m_{01}\curlywedge 0m_{00} \\ nM_1 & nM_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s_{11}\curlywedge 0s_{10} & s_{01}\curlywedge 0s_{00} \\ nS_1 & nS_0 \\ S_1 & 0S_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} s_{11}\curlywedge 0s_{10} & \\ g_{01}(m_{11}\curlywedge 0m_{10})s_{11}\curlywedge g_{00}(m_{01}\curlywedge 0m_{00})s_{10} & \\ S_1 & \\ & s_{01}\curlywedge 0s_{00} \\ & g_{11}(m_{11}\curlywedge 0m_{10})s_{01}\curlywedge g_{10}(m_{01}\curlywedge 0m_{00})s_{00} \\ & 0S_0 \end{bmatrix}$$

RU: $M_1+M_0 = 1$; $S_1+S_0 = 1$; $m_{11}'+m_{10}'+m_{01}'+m_{00}' = 1$; $s_{11}'+s_{10}'+s_{01}'+s_{00}' = 1$.

$$\text{RE: } \begin{cases} m_{11}' + m_{10}' = M_1 \\ m_{01}' + m_{00}' = M_0 \\ s_{11}' + s_{10}' = S_1 \\ s_{01}' + s_{00}' = S_0 \end{cases}$$

RI:

$$\begin{cases} g_{01}(m_{11}\curlywedge 0m_{10})s_{11}\curlywedge g_{11}(m_{11}\curlywedge 0m_{10})s_{01} = m_{11}\curlywedge 0m_{10} \\ g_{00}(m_{01}\curlywedge 0m_{00})s_{10}\curlywedge g_{10}(m_{01}\curlywedge 0m_{00})s_{00} = m_{01}\curlywedge 0m_{00} \end{cases}$$

$$\text{RD: } \begin{cases} g_{01}(m_{11}\curlywedge 0m_{10})s_{11}\curlywedge g_{00}(m_{01}\curlywedge 0m_{00})s_{10} \neq nC \\ g_{11}(m_{11}\curlywedge 0m_{10})s_{01}\curlywedge g_{10}(m_{01}\curlywedge 0m_{00})s_{00} \neq nC \end{cases}$$

În urma rezolvării sistemelor de ecuații de mai sus, se obțin următoarele moduri proprii:

4.5.3.2.1. Concluzie cu subiect pozitiv

4.5.3.2.1.1. Concluzie universală

Cuantif. numerici	Moduri proprii
$m_{10}=0$; $s_{10}=0$	Toți m_1M sunt P. Toți s_1S sunt M. **Toți s_1S sunt P.
$m_{00}=0$; $s_{11}=0$	Toți $m_0\bar{M}$ sunt P. Nici unul dintre cei s_1S nu este M. **Toți s_1S sunt P.
$m_{11}=0$; $s_{10}=0$	Nici unul dintre cei m_1M nu este P. Toți s_1S sunt M. **Nici unul dintre cei s_1S nu este P.
$m_{01}=0$; $s_{11}=0$	Nici unul dintre cei $m_0\bar{M}$ nu sunt P. Nici unul dintre cei s_1S nu este M. **Nici unul dintre cei s_1S nu este P.

4.5.3.2.1.2. Concluzie particulară afirmativă

Cuantif. numerici	Moduri proprii
$m_{11}\neq0$; $s_{10}=0$	$m_{11}M$ sunt P. Toți s_1S sunt M. **Cel mult $m_{11}S$ sunt P.
$m_{11}\neq0$; $s_{01}=0$	$m_{11}M$ sunt P. Nici unul dintre cei $s_0\bar{S}$ nu este M. **Cel puțin $m_{11}S$ sunt P.
$m_{10}=0$; $s_{11}\neq0$	Toți m_1M sunt P. $s_{11}S$ sunt M. **Cel puțin $s_{11}S$ sunt P.

$m_{01}\neq 0$; $s_{11}=0$	$m_{01}\overline{M}$ sunt P. Nici unul dintre cei s_1S nu este M. **Cel mult $m_{01}S$ sunt P.
$m_{01}\neq 0$; $s_{00}=0$	$m_{01}\overline{M}$ sunt P. Toți $s_0\overline{S}$ sunt M. **Cel puțin $m_{01}S$ sunt P.
$m_{00}=0$; $s_{10}\neq 0$	Toți $m_0\overline{M}$ sunt P. $s_{10}S$ nu sunt M. **Cel puțin $s_{10}S$ sunt P.
$m_{10}=0$; $s_{01}=0$	Toți m_1M sunt P Nici un $s_0\overline{S}$ nu este M. **Cel puțin m_1S sunt P.
$m_{00}=0$; $s_{00}=0$	Toți $m_0\overline{M}$ sunt P. Toți $s_0\overline{S}$ sunt M. **Cel puțin m_0S sunt P.

4.5.3.2.1.3. Concluzie particulară negativă

Cuantif. numerici	**Moduri proprii**
$m_{10}\neq 0$; $s_{10}=0$	$m_{10}M$ nu sunt P. Toți s_1S sunt M. **Cel mult $m_{10}S$ nu sunt P.
$m_{10}\neq 0$; $s_{01}=0$	$m_{10}M$ nu sunt P. Nici unul dintre cei $s_0\overline{S}$ nu este M. **Cel puțin $m_{10}S$ nu sunt P.
$m_{11}=0$; $s_{11}\neq 0$	Nici unul dintre cei m_1M nu este P. $s_{11}S$ sunt M.

	**Cel puțin $s_{11}S$ nu sunt P.
$m_{00}\neq 0$; $s_{11}=0$	$m_{00}\bar{M}$ nu sunt P Nici unul dintre cei s_1S nu este M. **Cel mult $m_{00}S$ nu sunt P.
$m_{00}\neq 0$; $s_{00}=0$	$m_{00}\bar{M}$ nu sunt P. Toți $s_0\bar{S}$ sunt M. **Cel puțin $m_{00}S$ nu sunt P.
$m_{01}=0$; $s_{10}\neq 0$	Nici unul dintre cei $m_0\bar{M}$ nu este P. $s_{10}S$ nu sunt M. **Cel puțin $s_{10}S$ nu sunt P.
$m_{11}=0$; $s_{01}=0$	Nici unul dintre cei m_1M nu este P. Nici unul dintre cei $s_0\bar{S}$ nu este M. **Cel puțin m_1S nu sunt P.
$m_{01}=0$; $s_{00}=0$	Nici unul dintre cei $m_0\bar{M}$ nu este P. Toți $s_0\bar{S}$ sunt M. **Cel puțin m_0S nu sunt P.

4.5.3.2.2. Concluzie cu subiect negativ

4.5.3.2.2.1. Concluzie universală

Cuantif. numerici	**Moduri proprii**
$m_{10}=0$; $s_{00}=0$	Toți m_1M sunt P. Toți $s_0\bar{S}$ sunt M. **Toți $s_0\bar{S}$ sunt P.
$m_{00}=0$; $s_{01}=0$	Toți $m_0\bar{M}$ sunt P. Nici unul dintre cei $s_0\bar{S}$ nu este M. **Toți $s_0\bar{S}$ sunt P.

$m_{11}=0$; $s_{00}=0$	Nici unul dintre cei m_1M nu este P. Toți $s_0\bar{S}$ sunt M. **Nici unul dintre cei $s_0\bar{S}$ nu este P.
$m_{01}=0$; $s_{01}=0$	Nici unul dintre cei $m_0\bar{M}$ nu sunt P. Nici unul dintre cei $s_0\bar{S}$ nu este M. **Nici unul dintre cei $s_0\bar{S}$ nu este P.

4.5.3.2.2.2. Concluzie particulară afirmativă

Cuantif. numerici	**Moduri proprii**
$m_{11}\neq0$; $s_{11}=0$	$m_{11}M$ sunt P. Nici unul dintre cei s_1S nu este M. **Cel mult $m_{11}\bar{S}$ sunt P.
$m_{11}\neq0$; $s_{00}=0$	$m_{11}M$ sunt P. Toți $s_0\bar{S}$ sunt M. **Cel mult $m_{11}\bar{S}$ sunt P.
$m_{10}=0$; $s_{01}\neq0$	Toți m_1M sunt P. $s_{01}\bar{S}$ sunt M. **Cel puțin $s_{01}\bar{S}$ sunt P.
$m_{01}\neq0$; $s_{10}=0$	$m_{01}\bar{M}$ sunt P. Toți s_1S sunt M. **Cel mult $m_{01}\bar{S}$ sunt P.
$m_{01}\neq0$; $s_{11}=0$	$m_{01}\bar{M}$ sunt P. Nici unul dintre cei s_1S nu este M. **Cel puțin $m_{01}\bar{S}$ sunt P.
$m_{00}=0$; $s_{00}\neq0$	Toți $m_0\bar{M}$ sunt P.

	$s_{00}\bar{S}$ nu sunt M. **Cel puțin $s_{00}S$ sunt P.
$m_{10}=0$; $s_{11}=0$	Toți m_1M sunt P. Nici un s_1S nu este M. **Cel puțin $m_1\bar{S}$ sunt P.
$m_{00}=0$; $s_{10}=0$	Toți $m_0\bar{M}$ sunt P. Toți s_1S sunt M. **Cel puțin $m_0\bar{S}$ sunt P.

4.5.3.2.2.3. Concluzie particulară negativă

Cuantif. numerici	**Moduri proprii**
$m_{10}\neq0$; $s_{11}=0$	$m_{10}M$ nu sunt P. Nici unul dintre cei s_1S nu este M. **Cel puțin $m_{10}\bar{S}$ nu sunt P.
$m_{10}\neq0$; $s_{00}=0$	$m_{10}M$ nu sunt P. Toți $s_0\bar{S}$ sunt M. **Cel mult $m_{10}\bar{S}$ nu sunt P.
$m_{11}=0$; $s_{01}\neq0$	Nici unul dintre cei m_1M nu este P. $s_{01}\bar{S}$ sunt M. **Cel puțin $s_{01}\bar{S}$ nu sunt P.
$m_{00}\neq0$; $s_{10}=0$	$m_{00}\bar{M}$ nu sunt P. Toți s_1S sunt M. **Cel puțin $m_{00}\bar{S}$ nu sunt P.
$m_{00}\neq0$; $s_{01}=0$	$m_{00}\bar{M}$ nu sunt P. Nici unul dintre cei $s_0\bar{S}$ nu este M. **Cel mult $m_{00}\bar{S}$ nu sunt P.

$m_{01}=0$; $s_{00}\neq 0$	Nici unul dintre cei $m_0\overline{M}$ nu este P $s_{00}\overline{S}$ nu sunt M. **Cel puțin $s_{00}\overline{S}$ nu sunt P.
$m_{11}=0$; $s_{11}=0$	Nici unul dintre cei m_1M nu este P. Nici unul dintre cei s_1S nu este M. **Cel puțin $m_1\overline{S}$ nu sunt P.
$m_{01}=0$; $s_{10}=0$	Nici unul dintre cei $m_0\overline{M}$ nu este P. Toți s_1S sunt M. **Cel puțin $m_0\overline{S}$ nu sunt P.

De exemplu, următoarele raționamente sunt corecte:

Toți cei 30 de elevi ai clasei *C* au fost în excursie.
14 băieți sunt elevi ai clasei *C*.
**Cel puțin 14 băieți au fost în excursie.

15 studenți din anul II nu au promovat examenul.
Nici unul dintre cei 100 de studenți bursieri nu sunt în anul II.
**Cel puțin 15 studenți care nu iau bursă nu au promovat examenul.

Pentru a fi corecte, raționamentele cu propoziții cuantificate numeric trebuie să se supună unor condiții specifice fiecărui mod. De pildă, în cazul primului exemplu, cuantificatorul numeric al minorei trebuie să nu fie mai mare decât cel al majorei.

Biblioteca Centrală Universitară

BIBLIOGRAFIE

1. Andreescu, G., 1992, *Sistemele axiomatice ale logicii limbajului natural*, Ed. All, Bucureşti.
2. Arlo-Costa, H., Pacuit, E., 2006, First-Order Classical Modal Logic, *Studia Logica*, 84, p. 171.
3. Atten, M.V., Kennedy, J., 2003, On the Philosophical Development of Kurt Godel, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 9, p. 425.
4. Balaiş, M., 1986, Unicitate şi existenţă în teoria descripţiilor, *Probleme de logică*, IX, Ed. Academiei RSR, p. 13.
5. Ballarin, R., 2005, Validity and Necessity, *Journal of Philosophical Logic*, 34, p. 275.
6. Barker, S., 1997, Material Implication and General Indicative Conditionals, *The Philosophical Quarterly*, 47, p. 195.
7. Beall, J.C., Fraassen, B.C.V., 2003, *Possibilities and Paradox*, Oxford University Press, Oxford.
8. Becker, O., 1968, *Fundamentele matematicii*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti.
9. Becker, O., 1968, *Măreţia şi limitele gândirii matematice*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti.
10. Bellissima, F., Cittadini, S., 1997, Minimal Axiomatization in Modal Logic, *Mathematical Logic Quarterly*, 43, p. 92.
11. Besnard, P., Guinnebault, J.M., Mayer, E., *Propositional Quantification for Conditional Logic*, IRISA, Rennes.
12. Burge, T., 1979, Semantical Paradox, *The Journal of Philosophy*, 76, 4, p. 169.
13. Carnap R., 1971, *The Logical Syntax of Language*, Routledge & K. Paul, London.

14. Copeland, B.J., 2002, The Genesis of Possible Worlds Semantics, *Journal of Philosophical Logic*, 31, p. 99.
15. Crabbe, M., 2003, The Formal Theory of Syllogism, *The Review of Modern Logic*, 9, 29, p. 29.
16. Cresswell, M.J., 2006, From Modal Discourse to Possible Worlds, *Studia Logica*, 82, p. 307.
17. Didilescu, I., Botezatu, P., 1976, *Silogistica*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.
18. Divers, J., 2002, *Possible Worlds*, Routledge, New York.
19. Dosen, K., 1992, A Brief Survey of Frames for the Lambek Calculus, *Zeitschr. f. math. Logic und Grundlagen d. Math.*, 38, p. 179.
20. Drăghici, V., 2007, *Logică*, Editura Fundaţiei Studiilor Europene, Cluj.
21. Dumitru, M., 1993, Identitate şi lumi posibile, *Probleme de logică*, Ed. Academiei Române, 10, p. 105.
22. Dumitriu, A., 1966, *Soluţia paradoxelor logico-matematice*, Ed. Academiei, Bucureşti.
23. Enescu, G., 1971, *Logica simbolică*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti.
24. Enescu, G., 1985, *Dicţionar de logică*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti.
25. Enescu, G., 1987, Problema deciziei în logica standard, *Analele Universităţii din Bucureşti*, 36, p. 26.
26. Enescu, G., 2003, *Paradoxuri, sofisme, aporii*, Ed. Tehnică, Bucureşti.
27. Fintel, K.V., 1998, Quantifiers and „If'-Clauses, *The Philosophical Quarterly*, 48, p. 209.
28. Fraassen, B.C.V., 1968, Presupposition, Implication, and Self-Reference, *The Journal of Philosophy*, 65, 5, p. 136.
29. Freudenthal, H., 1973, *Limbajul logicii matematice*, Ed. Tehnică, Bucureşti.
30. Garson, J.W., 2006, *Modal Logic for Philosophers*, Cambridge University Press, Cambridge.

31. Gödel, K., 1991, On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems, *Gödel's Theorem in Focus*, Routledge, London.
32. Grayling, A.C., 1998, *An Introduction to Philosophical Logic*, Blackwell, Oxford.
33. Haak, S., 1985, *Philosophy of Logics*, Cambridge University Press, Cambridge.
34. Hacking, I., 1963, What is Strict Implication, *The Journal of Symbolic Logic*, 28, 1, p. 51.
35. Haight, M., 1999, *The Snake and the Fox*, Routledge, London.
36. Halbach, V., Leitgeb H., 2003, Possible-Worlds Semantics for Modal Notions Conceived as Predicates, *Journal of Philosophical Logic*, 32.
37. Ioan, P., 1983, *Logică şi metalogică*, Ed. Junimea, Iaşi.
38. Jaskowski, S., 1969, On the Interpretations of Aristotelian Categorical Propositions in the Predicate Calculus, *Studia Logica*, 24, p. 161.
39. Karpenko, A.S., 2000, The Classification of Propositional Calculi, *Studia Logica*, 66, p. 253.
40. Kirk, R., 2006, Physicalism and Strict Implication, *Synthese*, 151, p. 523.
41. Kleene, S.C., 1971, *Logique mathematique*, A. Colin, Paris.
42. Kripke, S., 1963, Semantical Analysis of Modal Logic, *Zeitschr. f. math. Logic und Grundlagen d. Math.*, 9, p. 67.
43. Kripke, S., 1986, *Naming and Necessity*, Blackwell, New York.
44. Lewis, C.I., Langford C.H., 1959, *Symbolic Logic*, Dover, New York.
45. Link, G. (ed.), 2004, *One Hundred Years of Russell's Paradox*, de Gruyter, New York.
46. Lismont, L., 1993, La connaissance commune en logique modale, *Mathematical Logic Quarterly*, 39, p. 115.

47. Martens, D.B., 2004, Propositional Identity and Logical Necessity, *Australasian Journal of Logic*, 2, p. 1.
48. Maudlin, T., 2004, *Truth and Paradox*, Oxford University Press.
49. McGinn, C., 2000, *Logical Properties*, Oxford University Press.
50. Milne, P., 2008, Russell's Completeness Proof, *History and Philosophy of Logic*, 29, p. 31.
51. Narița, I., 1995, *Logica generală*, ISEPT, Timişoara.
52. Narița, I., 2000, *Logica schimbării*, Ed. Mirton, Timişoara.
53. Narița, I., 2003, *Cantor şi Gödel*, Ed. Mirton, Timişoara.
54. Narița, I., 2007, *Semiotica*, Ed. de Vest, Timişoara.
55. Narița, I., 2008, Paradoxes of the Material Implication, *Logos Architekton*, 2, 2, Cluj University Press, Cluj, p. 113.
56. Nishimura, H., 1980, A Preservation Theorem for Tense Logic, *Zeitschr. f. math. Logic und Grundlagen d. Math.*, 26, p. 1980.
57. Nolan, D.P., 2002, *Topics in the Philosophy of Possible Worlds*, Routledge, New York.
58. Novikov, P.S., 1966, *Elemente de logică matematică*, Ed. Ştiințifică, Bucureşti.
59. Popkorn, S., 1994, *First Steps in Modal Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.
60. Priest, G., 1997, Yablo's Paradox, *Analysis*, 57, 4, p. 236.
61. Prior, A.N., 1961, Some Axiom-Pairs for Material and Strict Implication, *Zeitschr. f. math. Logic und Grundlagen d. Math.*, 7, p. 61.
62. Prior, A.N., 1963, The Theory of Implication, *Zeitschr. f. math. Logic und Grundlagen d. Math.*, 9, p. 1.
63. Rautenberg, W., 2006, *A Concise Introduction to Mathematical Logic*, Springer, New York.
64. Russell, B., 1969, *Signification et verite*, Flammarion, Paris.
65. Sain, I., 1984, Structured Nonstandard Dynamic Logic, *Zeitschr. f. math. Logic und Grundlagen d. Math.*, 30, p. 481.

66. Salmon, N., 2002, Demonstrating and Necessity, *The Philosophical Review*, 111, p. 497.
67. Seymour Michael, F., 2002, Entailment and Bivalence, *Journal of Philosophical Logic*, 31, p. 289.
68. Shorter, J.M., 1956, Contradictories and Strict Implication, *Philosophy and Phenomenological Research*, 17, p. 122.
69. Smullyan, R., 2001, Extensions of some Theorems of Gödel and Church, *Philosophical Logic*, Blackwell, New York.
70. Sommers, F., 1974, The Logical and the Extra-Logical, *Metodological and Historical Essays*, D. Reidel, Dordrecht, p. 233.
71. Streumer, B., 2007, Reasons and Entailment, *Erkenntnis*, 66, p. 353.
72. Trumbull, H.C., 1894, *Practical Paradoxes*, John D. Wattles, Philadelphia.
73. Ţuţugan, F., 1956, Cu privire la existenţa unor moduri silogistice valabile, altele decât cele ale logicii clasice, *Probleme de logică*, Ed. Academiei RPR, Bucureşti, p. 315.
74. Ţuţugan, F., 1957, *Silogistica judecăţilor de predicaţie*, Ed. Academiei RPR, Bucureşti.
75. Vieru, S., 1975, *Axiomatizări şi modele ale sistemelor silogistice*, Ed. Academiei RSR, Bucureşti.
76. Whyte, J., 2005, *Crimes against Logic*, McGraw Hill, New York.
77. Wittgenstein, L., 1991, *Tractatus logico-philosophicus*, Ed. Humanitas, Bucureşti.
78. Yablo, S., 1993, Paradox without Self-Reference, *Analysis*, 53, 4, p. 251.
79. Zalta, E.N., 1988, Logical and Analytical Truths are not Necessary, *The Journal of Philosophy*, 85, p. 57.
80. Zenkin, A.A., 2004, Logic of Actual Infinity and G. Cantor's Diagonal Proof of the Uncountability of the Continuum, *The Review of Modern Logic*, 9, 30, p. 27.

CUPRINS

Limbajul simbolic..... 5

Propoziții..... 10

1. Sintaxa limbajului propozițiilor..... 10
2. Semantica limbajului propozițiilor..... 13
3. Logica propozițiilor..... 21
4. Aplicații ale logicii propozițiilor..... 29

Modalități..... 49

1. Sintaxa limbajului modal..... 49
2. Semantica limbajului modal..... 50
3. Logica modală..... 60

Predicate..... 63

1. Sintaxa limbajului predicatelor..... 63
2. Semantica limbajului predicatelor..... 67
3. Logica predicatelor..... 78
4. Aplicații ale logicii predicatelor..... 85

Scale..... 101

1. Schimbări şi transformări..... 101
2. Numere..... 105
3. Mişcări..... 116

Corelații..... 122

1. Propoziții de repartiție şi de corelație..... 122
2. Reprezentarea matriceală a propozițiilor de corelație 123
3. Corelații între scale binare..... 127
4. Aplicații ale logicii corelațiilor..... 138

Bibliografie..... 171